



INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO
VICENTE LEÓN

Guía

general de estudio
de la asignatura

MATEMÁTICA

José Luis Navas Vásconez



Carrera de Tecnología Superior en Control de Incendios y Operaciones

Asignatura: Matemática

Código de la asignatura: CIOR01-1B2

No existe el nivel asignado



INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO
VICENTE LEÓN

Av. Amazonas y Clemente Yerovi / Latacunga – Cotopaxi
Campus Norte

MATEMÁTICA

Autor: José Luis Navas Vásconez

MSc. Ángel Velásquez Cajas Editor

Directorio editorial institucional

Mg. Omar Sánchez Andrade Rector

Mg. Fabricio Quimba Herrera Vicerrector

Mg. Milton Hidalgo Achig Coordinador de la Unidad de Investigación

Diseño y diagramación

Mg. Alex Zapata Álvarez

Mtr. Leonardo López Lidioma

Revisión técnica de pares académicos

– Ing. Oscar Rodrigo Lara Jácome Mgtr.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

orlara@espe.edu.ec

– Ing. Daniel Gustavo Tobar Herrera Mgtr.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

dgtobar3@espe.edu.ec

ISBN: 978-9942-676-75-7

Primera edición

Agosto 2024

Usted es libre de compartir, copiar la presente guía en cualquier medio o formato, citando la fuente, bajo los siguientes términos: Debe dar crédito de manera adecuada, bajo normas APA vigentes, fecha, página/s. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma arbitraria sin hacer uso de fines de lucro o propósitos comerciales; debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original. No puede aplicar restricciones digitales que limiten legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.



RIMANA
EDITORIAL

DESARROLLO GUÍA DE ESTUDIO	5
1. Datos informativos	5
2. Presentación de la Asignatura	5
3. Introducción de los Temas	5
4. Objetivos de Aprendizaje	6
5. Unidad y Subunidades	7
6. Resultados de Aprendizaje	7
7. Estrategias Metodológicas	7
8. Criterios de Evaluación	8
9. Desarrollo de las Subunidades	9
10. Actividad de aprendizaje	37
11. Autoevaluación	41
12. Evaluación final	45
13. Solucionario de las autoevaluaciones	45
14. Glosario	49
15. Referencias bibliográficas	50
16. Anexos o recursos	50

DESARROLLO GUÍA DE ESTUDIO

1. Datos informativos

José Luis Navas es un ingeniero químico graduado en la Escuela Politécnica Nacional, quien cuenta con más de una década de experiencia dentro de la docencia de ciencias exactas. Su labor como docente lo empieza incluso antes de obtener su título, dando capacitaciones en centros preuniversitarios. Dentro de su experiencia docente ha desempeñado un papel fundamental en formación de bachilleres siendo profesor de educación media; donde su enfoque pedagógico se ha caracterizado por su claridad y accesibilidad, lo que ha ayudado a los estudiantes a superar sus dificultades con las matemáticas y a encontrar una apreciación por esta ciencia.

2. Presentación de la Asignatura

De acuerdo al PEA La asignatura de matemáticas es un campo fundamental del conocimiento que se enfoca en el estudio de las propiedades y relaciones de los números, las formas, las estructuras y los patrones. A través de la resolución de problemas y el razonamiento lógico, los estudiantes desarrollan habilidades críticas para la vida diaria y carreras en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM). La matemática brinda herramientas para analizar y resolver situaciones complejas en diversos campos, mediante el desarrollo del pensamiento analítico y la toma de decisiones en la vida cotidiana y profesional.

3. Introducción de los Temas

El estudio del álgebra, las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones, las funciones, la estadística y la probabilidad es fundamental en el ámbito académico y en la vida cotidiana. Estos conceptos matemáticos son pilares esenciales que tienen un impacto significativo en diversos campos y situaciones. Aquí se resalta su importancia en un resumen conciso:

Álgebra y Ecuaciones:

El álgebra es un lenguaje universal de la matemática que se utiliza para expresar relaciones y patrones. Las ecuaciones algebraicas permiten

resolver problemas complejos en diversas disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la informática. A través del álgebra, se pueden modelar situaciones del mundo real y encontrar soluciones para problemas variados.

Sistemas de Ecuaciones:

Los sistemas de ecuaciones son esenciales para describir interacciones y relaciones entre múltiples variables. La capacidad para resolver sistemas de ecuaciones es crucial en la toma de decisiones informadas en situaciones con múltiples factores.

Funciones:

Las funciones son herramientas matemáticas que describen cómo una variable depende de otra. Se aplican en diversos campos de estudio y ayudan a tomar decisiones basadas en datos.

La Estadística y la Probabilidad:

Ambas son fundamentales en la toma de decisiones informadas. La estadística analiza datos para identificar patrones y tendencias, mientras que la probabilidad cuantifica la incertidumbre. Ambas disciplinas son esenciales para la toma de decisiones en general, permitiendo evaluar riesgos y tomar medidas adecuadas.

En resumen, el estudio del álgebra, las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones, las funciones, la estadística y la probabilidad es crucial para resolver problemas, tomar decisiones y comprender el mundo que nos rodea. Estos conceptos matemáticos se aplican en una amplia variedad de disciplinas y situaciones, lo que demuestra su importancia en la vida cotidiana y en el avance del conocimiento en numerosos campos. Fortalecer la comprensión y competencia en estas áreas es una inversión valiosa en el desarrollo personal y profesional.

4. Objetivos de Aprendizaje

El estudiante podrá manejar el álgebra como herramienta elemental para la resolución de problemas matemáticos.

5. Unidad y Subunidades

5.1. Álgebra

- 5.1.1. Fracciones
- 5.1.2. Exponentes, propiedades
- 5.1.3. Potenciación
- 5.1.4. Radicación
- 5.1.5. Logaritmicación
- 5.1.6. Exponentes fraccionarios
- 5.1.7. Productos notables
- 5.1.8. Factorización

5.2. Ecuaciones

- 5.2.1. Ecuaciones polinómicas de primer grado
- 5.2.2. Ecuaciones polinómicas de segundo grado

6. Resultados de Aprendizaje

Con estudio de estas unidades se asegura que el estudiante:

- Maneja el álgebra como herramienta elemental para la resolución de problemas matemáticos.
- Analiza datos y transformar los en información útil para tomar decisiones.
- Identifica los elementos básicos de un espacio probabilístico y los relaciona con los fundamentos de la teoría de probabilidades.

7. Estrategias Metodológicas

La estrategia metodológica a desarrollar en esta asignatura, considerando el nivel tecnológico es el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Esta metodología involucra a los estudiantes en la resolución de problemas prácticos relacionados con sus futuras profesiones, lo que les permite aplicar conceptos matemáticos de manera relevante. Los pasos clave del ABP son:

Identificación del problema: Presenta a los estudiantes un problema real o una situación relacionada con su campo técnico o tecnológico que requiera habilidades matemáticas para resolverlo.

Investigación y adquisición de conocimientos: Los estudiantes investigan y adquieren los conceptos matemáticos necesarios para abordar el problema. Pueden utilizar recursos como libros de texto, tutoriales en línea y consultas con el profesor.

Resolución del problema: Los estudiantes trabajan en grupos o de manera individual para aplicar los conceptos matemáticos y resolver el problema planteado, utilizando cálculos y análisis matemáticos.

Presentación de soluciones: Los estudiantes presentan sus soluciones de manera clara y lógica, explicando los procesos matemáticos utilizados y las conclusiones obtenidas.

Retroalimentación y discusión: Se fomenta la discusión en clase para evaluar las soluciones presentadas y proporcionar retroalimentación constructiva. Los errores se consideran oportunidades de aprendizaje.

Evaluación: Se evalúa tanto el proceso de resolución de problemas como el entendimiento de los conceptos matemáticos involucrados. La evaluación puede incluir exámenes, presentaciones y evaluación de proyectos.

8. Criterios de Evaluación

– Se evaluará un 60% mediante trabajos prácticos: Estos corresponden a trabajos individuales y grupales. También se considerará en este punto el trabajo autónomo. Uno de los parámetros que se evalúan en este criterio son las exposiciones

– El 20% de lecciones: Corresponde al promedio de todas las lecciones rendidas a lo largo de cada parcial. Las lecciones no son acumulativas necesariamente.

– El 20% de la evaluación final: Corresponde a una evaluación sumativa donde el estudiante demuestra lo aprendido y asimilado durante el parcial poniendo en práctica sus conocimientos

Estructura: El estudiante será evaluado a través del planteamiento de problemas matemáticos para la resolución mediante la aplicación de fórmulas, modelos y el razonamiento lógico

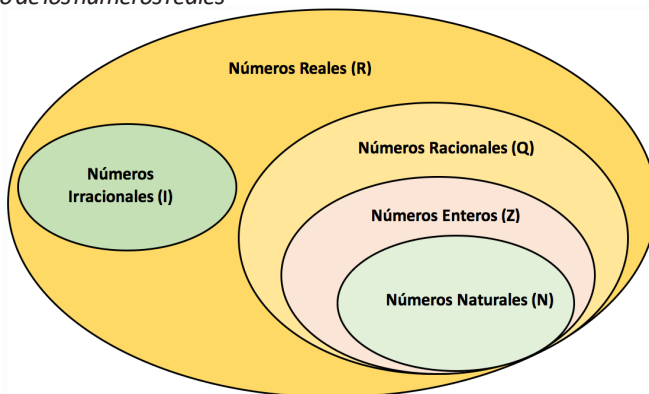
9. Desarrollo de las Subunidades

9.1. Álgebra

Para entender el álgebra, es necesario tener claros los conceptos de los conjuntos numéricos que existen dentro de los números reales. Entendiendo por números reales a aquellos contemplados en toda la recta numérica, desde el infinito negativo hasta el infinito positivo. Un resumen de los conjuntos numéricos se manifiesta en la Figura 1 (Medina, 2022).

Figura 1

Conjunto de los números reales



Nota. El gráfico representa la relación de pertenencia de un conjunto numérico a otro dentro del conjunto de los números reales.

- **Conjunto de los números naturales:** $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Conjunto de los números enteros:** $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

- **Conjunto de los números racionales:** $Q = \{a/b; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$. Incluye a los números enteros y fraccionarios.
- **Conjunto de los números irracionales:** Todos los números que no se pueden escribir como $a/b; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$
- **Conjunto de los números reales:** R es la unión de los números racionales e irracionales.
- **$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.**

Los números reales presentan varias propiedades importantes que deben ser tomadas en cuenta en la resolución de ejercicios. Estas propiedades se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1
Propiedades de los números reales

Nombre de la propiedad	Definición
Propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación	$a + b = b + a$ $ab = ba$
Propiedad asociativa de la suma y la multiplicación	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a(bc) = (ab)c$
Elemento neutro de la suma y de la multiplicación	$a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$
Elemento opuesto de la suma:	$a + (-a) = 0$
Elemento inverso de la multiplicación	$a \cdot (a)^{-1} = 1$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma	$a(b + c) = ab + ac$
Elementos de afectan a la multiplicación y a la división	$a \cdot 0 = 0$ $\frac{0}{a} = 0$ $\frac{a}{0} = \#$

Nota. Estas son algunas de las propiedades básicas de los números reales que se deberán tomar en cuenta al momento de resolver problemas matemáticos.

Los números naturales (excepto la unidad), tienen la particularidad de que aceptan una descomposición en factores primos. Los factores primos son aquellos números que son divisibles solo por sí mismos y para la unidad (2, 3, 5, 7, ...). Esta descomposición puede usarse para expresar una cantidad como el producto de otras cantidades.

Para ayudarse en la descomposición de un número en factores primos es necesario tener en cuenta algunas reglas de divisibilidad:

- Todo número par es divisible entre 2.
- Todo número, cuya suma de sus dígitos es múltiplo de 3, es divisible entre 3
- Todo número que termina en cero o 5 es divisible entre 5.
- Si el número es par y es divisible por 3 entonces es divisible por 6
- Si el doble del último dígito se resta del resto del número y queda cero o un múltiplo de 7 es divisible por 7.

9.1.1. Fracciones

Las fracciones son utilizadas en el mundo de la matemática para expresar una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador). Ambas cantidades deben ser estrictamente números enteros y el denominador debe ser siempre diferente de cero.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{3}{4}$, “3” es el numerador, lo que significa que se están considerando tres de las “4” partes iguales en las que se divide el todo.

Suma y resta de fracciones

Para efectuar las operaciones de suma y resta de fracciones es necesario acudir al concepto de mínimo común múltiplo.

Mínimo común múltiplo (MCM): corresponde al menor de los múltiplos de un grupo de números. Se calcula mediante la descomposición de dichos números en sus factores primos.

Ejemplo: Calcular el mínimo común múltiplo de 5; 12 y 20

5	12	20	2	Se descompone hasta tener el a como resultado de la división de cada cifra. El MCM corresponde a la multiplicación de todos los factores primos. MCM= 2 · 2 · 3 · 5 = 60
	6	10	2	
	3	5	3	
	1		3	
1		1		

En las fracciones este concepto se aplica en los denominadores. Para esto recibe el nombre de mínimo común denominador.

Ejemplo: Realizar la siguiente operación

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{3}{20} = \frac{24-25+9}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

Multiplicación y división de fracciones

Para multiplicar fracciones se lo hace numeradores con numeradores y denominadores con denominadores. De manera general se podría expresar así:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Cabe mencionar que antes de multiplicar, si es posible se debe simplificar las fracciones. Para esto se puede tomar un numerador y simplificarlo con cualquier denominador involucrado en la operación.

Ejemplo: Realizar la siguiente multiplicación

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{20}$$

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{20}}$$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 4 \cdot 10}$$

$$\frac{1}{40}$$

Para dividir fracciones, lo que se recomienda es convertir la operación en una multiplicación. Esto se consigue al invertir la fracción correspondiente al divisor (la fracción que se encuentra luego del signo de división), de la siguiente manera:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Una vez realizada esta conversión, se puede seguir las mismas directrices estudiadas para la multiplicación de fracciones.

Fracciones Algebraicas

Dentro del mundo del álgebra, se deben estudiar también las fracciones algebraicas, que son aquellas en las que el numerador y/o el denominador son polinomios.

Por ejemplo, $\frac{x}{2} \div \frac{x+2}{3x-1}$; $\frac{3}{3-x}$, serían fracciones algebraicas.

De manera general, una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, que se podrían expresar así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Las fracciones algebraicas tienen las mismas propiedades que los números racionales, entonces, se debe tomar en cuenta que al momento de

realizar las sustituciones de variables no se pueden considerar los valores que vuelven cero al denominador. (Angel, 2007)

Por ejemplo, al analizar las siguientes expresiones algebraicas se tiene que:

$$\frac{3x-2}{x} \text{ x no podría ser } 0$$

$$\frac{x+2}{x+3} \text{ x no puede ser } -3$$

Las reglas para efectuar operaciones algebraicas con número racionales son iguales que las de enteros.

9.1.2. Exponentes, Propiedades

Para el desarrollo del álgebra se necesita tener conocimiento de los exponentes y sus propiedades. Es necesario tener en cuenta los elementos que entran en juego en un término con exponentes.

$$a^n = c$$

Donde:

a: Es la base y corresponde al número que va a multiplicarse por sí mismo el número de veces que indique el exponente

n: El exponente indica el número de veces que se multiplica por sí misma la base

c: Es el resultado de una potenciación y se denomina potencia.

Ejemplos:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Las principales propiedades de los exponentes son las que se indican la Tabla 2:

Tabla 2.

Propiedades de los exponentes

Nombre de la propiedad	Definición
Exponente cero	$a^0 = 1; a \neq 0$
Exponente uno	$a^1 = a$
Potencia de base cero	$0^n = 0; n \neq 0$
Potencia de base uno	$1^n = 1$
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
Elemento opuesto de la suma:	$a + (-a) = 0$
Producto de potencias de potencias de la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de potencias de la misma base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n b^n$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Nota. Las reglas de los exponentes se aplican en toda operación algebraica. Se debe seguir la jerarquía de operaciones con la regla PEMDAS (Paréntesis, Exponentes, Multiplicación, Adición y Sustracción) en cada término algebraico.

9.1.3. Potenciación

La potenciación es una operación matemática que opera la base con su exponente. En la potenciación existen exponentes que se leen de una forma

especial como son el exponente 2 que se lee “al cuadrado”, y el exponente 3 que se lee “al cubo” (Bonilla, 2012).

Para la potenciación se debe, además de las leyes de los exponentes tener en cuenta la ley de los signos que se resume en la Tabla 3.

Tabla 3.

Ley de signos

Signo de la base	Exponente	Signo
+	Par	+
+	Impar	+
-	Par	+
-	Impar	-

Nota. La ley de signos debe ser lo primero que se aplique al efectuar multiplicaciones o divisiones entre términos algebraicos.

Ejemplo 1: Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(-\frac{12xy^2z^4}{16x^7y^3z^2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{3z^{4-2}}{4x^{7-1}y^{3-2}}\right)^2$$

$$\left(-\frac{3z^2}{4x^6y}\right)^2$$

$$\frac{9z^4}{16x^{12}y^2}$$

Simplificación de coeficientes

Cociente de potencias de la misma base

Resolución de operaciones en los exponentes

Potencia de otra potencia

Base negativa con exponente par

Ejemplo 2: Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(-\frac{21x^4y^5z^{-5}}{14x^2y^{-3}z^{-2}} \right)^3$$

$$\left(-\frac{3x^4y^5z^2}{2x^2y^5z^5} \right)^3$$

$$\left(-\frac{3x^{4-2}y^{5+3}}{2z^{5-2}} \right)^3$$

$$\left(-\frac{3x^2y^8}{2z^3} \right)^3$$

$$-\frac{27x^6y^{24}}{8z^9}$$

Simplificación de coeficientes

Exponente negativo

Producto de potencias de la misma base

Cociente de potencias de la misma base

Resolución de operaciones en los exponentes

Potencia de otra potencia

Base negativa, exponente impar

Radicación

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Con la radicación se logra encontrar la base cuando se conoce el exponente y la potencia (Bonilla, 2012).

Los elementos de una raíz se muestran a continuación:

$$\sqrt[n]{c} = a$$

Donde:

c: Es el radicando e indica el valor de la potencia

n: Es el índice de la raíz y corresponde el exponente de la potencia

a: Es la raíz, es decir es la base buscada de la potencia.

Para un mayor entendimiento de la relación entre la radicación y la potenciación se puede observar el diagrama:

$$\sqrt[n]{c} = a \longleftrightarrow a^n = c$$

Al igual que en la potenciación, existen índices que dan un nombre especial a la raíz. Cuando el índice es 2, se lee “raíz cuadrada”, mientras que, si el índice es 3, se lee “raíz cúbica”.

Para resolver ejercicios de potenciación es necesario conocer las propiedades de la radicación, mismas que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4.
Propiedades de la radicación

Nombre de la propiedad	Definición
Raíz de uno	$\sqrt[n]{1} = 1$
Raíz de cero	$\sqrt[n]{0} = 0$
Raíz a exponente	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
Potencia de una raíz	$(\sqrt[n]{a^m})^p = (\sqrt[n]{a})^m)^p = (\sqrt[n]{a})^{mp} = \sqrt[n]{a^{mp}}$
Introducir factores en una raíz	$b \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m b^n}$
Multiplicación de raíces con índices distintos	$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[p]{b^q} = \sqrt[mp]{a^{np} \cdot b^{qm}}$
Raíz de números negativos	$\sqrt[\text{par}]{-a} = \text{no existe solución real}$ $\sqrt[\text{impar}]{-a} = \text{Ráiz negativa}$

Nota. Las propiedades de los radicales al igual que la de los exponentes se aplican dentro de cada término algebraico y siguiendo la jerarquía con la regla PEMDAS.

Ejemplo 1:

$$\frac{\sqrt[4]{a^2b^3} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4}}{\sqrt[3]{a^2b}}$$

$$\frac{\sqrt[12]{(a^2b^3)^3} \cdot \sqrt[12]{(a^5b^4)^2}}{\sqrt[12]{(a^2b)^4}}$$

$$\sqrt[12]{\frac{(a^6b^9)(a^{10}b^8)}{(a^8b^4)}}$$

$$\sqrt[12]{a^8b^{13}}$$

$$\sqrt[12]{a^8b^{12}b}$$

$$b \cdot \sqrt[12]{a^8b}$$

Multiplicación (división) de raíces con diferente índice

Raíz de un producto (aplicada de manera inversa)

Potencia de otra potencia

Multiplicación de potencias de la misma base

División de potencias de la misma base

Descomposición de potencia (13=12+1)

Raíz doceava de $b^{12} = b$

Ejemplo 2:

$$\frac{\sqrt[5]{xy^4} \cdot \sqrt[10]{x^5y^3}}{\sqrt[6]{x^2y^3} \cdot \sqrt[15]{xy^9}}$$

$$\frac{\sqrt[30]{(xy^4)^6} \cdot \sqrt[30]{(x^5y^3)^3}}{\sqrt[30]{(x^2y^3)^5} \cdot \sqrt[30]{(xy^9)^2}}$$

$$\sqrt[30]{\frac{(x^6y^{24})(x^{15}y^9)}{(x^{10}y^{15})(x^2y^{18})}}$$

$$\sqrt[30]{x^9y^0}$$

$$\sqrt[30]{x^9}$$

$$\sqrt[3 \cdot 10]{x^{3 \cdot 3}}$$

$$\sqrt[10]{x^3}$$

Multiplicación (división) de raíces con diferente índice

Raíz de un producto (aplicada de manera inversa)

Potencia de otra potencia

Multiplicación de potencias de la misma base

División de potencias de la misma base

Exponente cero $a^0 = 1$

Descomposición en factores

Aplicación de la raíz cúbica (simplificación)

Logaritmicación

Encontrar un logaritmo de un número en una base dada, consiste en encontrar el exponente al cual hay que elevar la base para hallar dicho número (Swokowski, 2011).

La relación que tendría entonces con la potenciación sería:

$$\log_a c = n \qquad a^n = c$$

Para resolver problemas que tienen que ver con logaritmos es necesario tomar en cuenta las siguientes propiedades:

Tabla 5.
Propiedades de la logaritmicación

Nombre de la propiedad	Definición
Logaritmo de la unidad	$\log_a 1 = 0$
Logaritmo de la base	$\log_a a = 1$
Logaritmo del producto de dos números positivos	$\log_a N \cdot M = \log_a N + \log_a M =$
Logaritmo del cociente de dos números positivos	$\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M =$
Logaritmo de la potencia de un número positivo	$\log_a N^p = p \cdot \log_a N$
Cambio de base	$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

Nota. Estas propiedades son las básicas para resolver algunas expresiones que contienen logaritmos. Pueden utilizarse en la resolución de ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo 1: Hallar el valor del siguiente logaritmo

$$\log_4 64$$

$$\log_4 64 = x$$

Igualación del logaritmo a una variable

$$4^x = 64$$

Notación exponencial del logaritmo

$$4^x = 4^3$$

Descomposición del 64 en potencia de 4 para
igualar las bases

$$x = 3$$

Igualación de los exponentes

Ejemplo 2: Resolver la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_3 x = 2$$

$$3^2 = x$$

Notación exponencial del logaritmo

$$9 = x$$

Resolución de la potencia

9.1.6. Exponentes Fraccionarios

Los exponentes fraccionarios cumplen todas y cada una de las propiedades de los exponentes que se estudiaron anteriormente. La particularidad en estos exponentes recae más bien en la forma de resolver las operaciones entre números fraccionarios. Una propiedad muy utilizada es la de convertir el exponente fraccionario a raíz.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 1: Determinar el valor de:

$$16^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{16^3}$$

Exponente fraccionario a raíz

$$(\sqrt[4]{16})^3$$

Sacar el exponente del radicando

$$(2)^3$$

Aplicar la raíz cuarta

$$8$$

Aplicar potenciación

Ejemplo 2: Determinar el valor de:

$27^{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt[3]{27}$	Exponente fraccionario a raíz
3	Aplicar la raíz cúbica

9.1.7. Productos notables

En la ejecución de multiplicaciones algebraicas existen ciertos algoritmos que simplifican la resolución de dichas operaciones. A esas multiplicaciones que se ejecutan siguiendo una misma regla se las conoce con el nombre de productos notables, mismos que se resumen en la Tabla 6 (Stewart, 2012).

Tabla 6.
Productos notables

Caso	Regla	Forma
Binomio al cuadrado	El cuadrado de la primera cantidad, más o menos el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Binomio al cubo (suma)	El cubo de la primera cantidad, más tres veces el cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más tres veces la primera cantidad por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Binomio al cubo (resta)	El cubo de la primera cantidad, menos tres veces el cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más tres veces la primera cantidad por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Producto de binomios conjugados	El cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda cantidad	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Producto de dos binomios con un término en común	El término en común al cuadrado, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes	$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$
Trinomio al cuadrado	La suma de los cuadrados de los tres términos, más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del primero por el tercero y más el doble producto del segundo por el tercero	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Nota. Se deben aplicar siempre que sea posible los productos notables para evitar resolver la multiplicación mediante la propiedad distributiva para ahorrar tiempo en la resolución de ejercicios.

9.1.8. Factorización

Como bien se sabe el término factor es utilizado en la multiplicación, entonces se puede decir que la factorización es la operación inversa a la multiplicación, pues los que se busca son los factores que dieron origen a un producto. En palabras simples, lo que pretende la factorización es transformar una expresión algebraica que se encuentra dada a manera de suma y/o resta en una multiplicación (Stewart, 2012).

A continuación, se revisarán los casos más comunes e importantes de factorización.

9.1.8.1. Factor Común

El factor común es el caso más importante de la factorización, y es aplicable en binomios, trinomios y polinomios en general. Siempre debe ser el primer caso analizado independientemente del caso que se pretenda ejecutar.

El factor común de una expresión algebraica puede ser un número, una letra o ambos a la vez. En el caso de los números, el factor común será el máximo común divisor de todos los coeficientes. Para la o las letras, en cambio corresponderá a la o las que tengan menor exponente y que estén presentes en todos los términos de la expresión a factorizar.

Cabe señalar que el factor común no es necesariamente un monomio, este puede ser un factor de más de un término.

Para un mayor entendimiento, se analizan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Factorizar la siguiente expresión

$$3x - 3y$$

El factor común en este caso sería solo numérico.

$$3(x - y)$$

Se divide cada término para el factor común y se tendría la expresión factorizada

Ejemplo 2: Factorizar la siguiente expresión

$$2x - 3x^2$$

El factor común en este caso sería solo literal.

$$x(2 - 3x)$$

Se divide cada término para el factor común y se tendría la expresión factorizada

Ejemplo 3: Factorizar la siguiente expresión

$$3x - 3x^2$$

El factor común en este caso sería numérico y literal

$$3x(1 - x)$$

Se divide cada término para el factor común y se tendría la expresión factorizada

Ejemplo 4: Factorizar la siguiente expresión

$$12x^2y^3 - 16x^3y^2z$$

El factor común en este caso sería numérico y literal

$$4x^2y^2(3y - 4xz)$$

El máximo común divisor de 12 y 16 es 4. Las letras comunes en todos los términos son x, y. Para x el menor exponente es dos y para y es 2.

Ejemplo 5: Factorizar la siguiente expresión

$$a(x + y) + 3b(x + y) - 2c(x + y)$$

El factor común en este caso sería el binomio $(x + y)$

$$(x + y)(a + 3b - 2c)$$

Se divide cada término para el factor común.

9.1.8.2. Factor Común por Agrupación de Términos

Este caso es aplicable en polinomios con números de términos pares, es decir 4, 6, 8, etc. Se intenta aplicar este caso siempre y cuando se haya verificado con anterioridad que no existe factor común.

Para este caso, se debe formar grupos de igual número de términos, es decir de dos en dos, de tres en tres, etc. Se debe tomar en cuenta que para agrupar siempre se buscan términos que entre ellos si exista factor común.

Es conveniente agrupar los términos comunes entre paréntesis considerando que, si el primer término que se agrupa es negativo, todos los signos dentro del paréntesis deben cambiar. Una vez agrupados de manera adecuada, se procede a sacar el factor común de cada paréntesis. Si hasta aquí no se han cometido errores se tendrá un ejercicio similar al caso de factor común estudiado anteriormente.

A continuación, se analizan ejemplos de aplicación de este caso:

Ejemplo 1: Factorizar la siguiente expresión

$px + mx + py + my$	Se observa que no existe factor común.
$(px + mx) + (py + my)$	Se agrupan en paréntesis de dos en dos los términos que tienen algo en común
$x(p + m) + y(p + m)$	Se saca el factor común de cada paréntesis
$(p + m)(x + y)$	Se aplica factor común

El ejercicio anterior puede resolverse agrupando de otra manera, así:

$px + mx + py + my$	
$(px + py) + (mx + my)$	Se agrupa con otro criterio de similitud
$p(x + y) + m(x + y)$	Se saca factor común de cada paréntesis
$(x + y)(p + m)$	Se aplica factor común. El resultado es el mismo que el obtenido anteriormente, pues el orden de los factores no altera el producto

Ejemplo 2: Factorizar la siguiente expresión

$2ac - 5bd - 2a + 2ad + 5b$	Se observa que no existe factor común.
$- 5bc$	
$(2ac - 2a + 2ad) - (5bd - 5b$	Se agrupan en paréntesis de tres en tres los
$+ 5bc)$	términos que tienen algo en común. Hay que
	fijarse que en la segunda agrupación precede el
$2a (c - 1 + d) - 5b (d - 1 + c)$	signo menos, por lo tanto, los signos dentro del
	paréntesis van cambiados.
$2a (c + d - 1) - 5b (c + d - 1)$	Se puede reordenar sin alterar los signos, para
	tener una mejor perspectiva del factor común
$(c + d - 1) (2a - 5b)$	Se aplica factor común

9.1.8.3. Diferencia de Cuadrados

Este caso es aplicable únicamente en binomios de la forma $a^m - b^n$. Donde tanto a como b son cuadrados perfectos, por lo tanto, tienen raíz cuadrada exacta; mientras que los exponentes m y n son números pares.

Para factorizar una diferencia de cuadrados, se debe extraer la raíz cuadrada de cada término. Para esto, a los coeficientes se les aplica la raíz cuadrada normalmente, mientras que a los exponentes se los divide para dos. Estos resultados se los coloca dentro de dos paréntesis que denotan una multiplicación. En el primer paréntesis los términos se suman y en el segundo se restan. Para un mayor entendimiento se analiza el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Factorizar la siguiente expresión.

$49x^4 - 64y^6$	
$\sqrt{49x^4} = 7x^2$	Se extraen las raíces cuadradas de cada uno de
$\sqrt{64y^6} = 8y^3$	los términos del binomio.
$(7x^2 + 8y^3) (7x^2 - 8y^3)$	Se coloca las raíces extraídas en dos paréntesis,
	en el uno sumando y en el otro restando.

Ejemplo 2: Factorizar la siguiente expresión.

$$8x^9 - 18xy^{10}$$

$$2x(4x^8 - 9y^{10})$$

Se extrae factor común

$$\sqrt{4x^8} = 2x^4$$

Se extraen las raíces cuadradas de cada uno de

$$\sqrt{9y^{10}} = 3y^5$$

los términos del binomio.

$$2x(2x^4 + 3y^5)(2x^4 - 3y^5)$$

Se coloca las raíces extraídas en dos paréntesis, en el uno sumando y en el otro restando.

9.1.8.4. Trinomio Cuadrado Perfecto

Para poder realizar este caso se debe cumplir que en un trinomio ordenado de manera ascendente o descendente tanto el primer como el tercer término aparte de ser positivos deben ser cuadrados perfectos. Además, el término de la mitad debe responder al doble producto de las raíces del primer y tercer término.

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es un binomio al cuadrado, que se construye con las raíces cuadradas del primer y tercer término separadas por el signo del segundo término. Para aclarar se analizan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Factorizar la siguiente expresión.

$$9x^2 - 24x + 16$$

$$\sqrt{9x^2} = 3x$$

Se extraen las raíces cuadradas del primer y tercer término

$$\sqrt{16} = 4$$

$$2(3x)(4) = 24x$$

Se comprueba que el doble producto de las raíces corresponda al segundo término del trinomio ordenado.

$$(3x - 4)^2$$

Se factoriza como un binomio al cuadrado, conformado por las raíces del primer y tercer término y el signo del segundo término

Ejemplo 2: Factorizar la siguiente expresión.

$$(2m + 1)^2 + 8(2m + 1) + 16$$

$$\sqrt{(2m+1)^2} = 2m+1$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$2(2m+1)(4) = 8(2m+1)$$

$$[(2m+1)+4]^2$$

9.1.8.5. Factorización de Trinomios

Si bien en los textos de álgebra se analizan dos casos adicionales de trinomios como son el caso del trinomio de la forma $x^{2n}+bx^n+c$ y el caso del trinomio de la forma $ax^{2n}+bx^n+c$, lo que se pretende en este documento es indicar un método que permita factorar todo tipo de trinomio, incluso el ya estudiado trinomio cuadrado perfecto.

El método que se sugiere utilizar para este efecto corresponde al del aspa simple, para lo cual se utilizará un ejemplo para una ilustración del mismo.

Ejemplo: Factorizar la siguiente expresión.

$$6x^2 - 16 + 4x$$

$$6x^2 + \textcircled{4x} - 16$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & \nearrow & 4 = 12x \\ & \times & \\ 3x & \searrow & -4 = -8x \end{array}$$

4x

$$(2x + 4)(3x - 4)$$

Se debe ordenar el trinomio de forma
ascendente o descendente

Se descompone en factores al primer y tercer término teniendo en cuenta los signos de estos.

Se multiplica en cruz los factores y si la suma de estos productos resulta el segundo término del trinomio, se concluye que está bien factorado.

Para concluir la factorización se copian los factores de manera horizontal en dos paréntesis.

9.1.8.6. Suma y Diferencia de Cubos

Este caso es aplicable únicamente en binomios de la forma $(a^m \pm b^n)$. Donde tanto a como b son cubos perfectos, por lo tanto, tienen raíz cúbica exacta; mientras que los exponentes m y n son múltiplos de tres.

Para factorizar este caso, se debe extraer las raíces cúbicas de cada término. Para esto, a los coeficientes se les aplica la raíz cúbica normalmente, mientras que a los exponentes se los divide para tres. Se abren dos grupos de paréntesis que se multiplican, en el primer paréntesis se construye un binomio con las raíces cúbicas mientras que en el segundo paréntesis construye un trinomio con los términos que se anotaron en el primer paréntesis de la siguiente manera: el primero al cuadrado, luego el producto del primero por el segundo y por último, el segundo al cuadrado. Para definir los signos se puede resumir de la siguiente manera:

– Suma de cubos: en el primer paréntesis va el signo positivo y en segundo los signos van intercalados iniciando siempre con positivo.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

– Diferencia de cubos: en el primer paréntesis va el signo negativo y en segundo todos los signos van positivos.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 1: Factorizar el siguiente binomio

$$27x^6 + 8y^9$$

$$\sqrt[3]{27x^6} = 3x^2$$

Se extraen las raíces cúbicas de ambos

$$\sqrt[3]{8y^9} = 2y^3$$

miembros del binomio

$$(3x^2 + 2y^3)(9x^4 - 6x^2y^3 + 4y^6)$$

Se sigue la regla indicada para la suma de cubos

Ejemplo 2: Factorizar el siguiente binomio

$$27x^6 - 8y^9$$

$$\sqrt[3]{27x^6} = 3x^2$$

Se extraen las raíces cúbicas de ambos miembros del binomio

$$\sqrt[3]{8y^9} = 2y^3$$

$$(3x^2 - 2y^3)(9x^4 + 6x^2y^3 + 4y^6)$$

Se sigue la regla indicada para la suma de cubos

Ecuaciones

Si dos expresiones o cantidades están separadas por un signo igual y se puede afirmar que dichas expresiones son iguales, se dice entonces que es una ecuación.

En álgebra normalmente se dice que una ecuación está referida a una variable. Por ejemplo, una ecuación en x correspondería a un enunciado de igualdad que contenga como variable la letra x , y ésta contendría únicamente expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales entre otras. En esta guía se van a revisar las ecuaciones de primer y segundo grado.

Ecuaciones Polinómicas de Primer Grado

Las ecuaciones de primer grado son también conocidas como ecuaciones lineales, y son ecuaciones algebraicas en la que la variable tiene como máximo exponente el uno y no está multiplicada ni dividida por ninguna otra variable (Stewart, 2012).

La forma general de una ecuación de primer grado es:

$$ax + b = 0$$

La solución de una ecuación de primer grado es el valor de la variable que satisface la ecuación. Dicho esto, se podrían dar los siguientes casos:

- La solución es un número real único
- No hay soluciones pues la ecuación representa una contradicción
- Tiene infinitas soluciones, pues la ecuación es una identidad

Para solucionar una ecuación de primer grado es necesario tener presente la transposición de términos. La trasposición de términos se puede resumir así:

– Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

– Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

$4x - 3 = 2x - 7$	
$4x - 3 - 2x = 2x - 7 - 2x$	Se resta a ambos miembros $2x$ para dejar
$2x - 3 = -7$	en el miembro de la derecha solo los
$2x - 3 + 3 = -7 + 3$	términos independientes.
$2x = -4$	Se suma tres a ambos miembros.
$\frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$	Se divide por 2 ambos miembros
$x = -2$	Se resuelve y se encuentra el valor de la
	incógnita.

Esta sería la forma de cómo funciona la transposición de términos para el despeje de una variable, sin embargo, una manera más convencional de entender este procedimiento se puede resumir en la siguiente tabla:

Tabla 7.

Resumen de la transposición de términos

Caso	Diagramación	Regla
Transposición de la suma		Todo término que se encuentre sumando en un miembro, pasa al otro miembro a restar
Transposición de la resta		Todo término que se encuentre restando en un miembro, pasa al otro miembro a sumar
Transposición de la multiplicación	$\times = \div$	Todo término que se encuentre multiplicando a la variable en un miembro, pasa al otro miembro a dividir
Transposición de la división	 	Todo término que se encuentre dividiendo a la variable en un miembro, pasa al otro miembro a multiplicar

Nota. Las reglas de transposición son una simplificación del procedimiento real que sucede al intentar despejar una incógnita, en el cual se utilizan las reglas de los inversos aditivos y/o multiplicativos en ambos miembros de la ecuación.

En los siguientes ejercicios se podrán analizar algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado.

Ejemplo 1: Resolver la siguiente ecuación de primer grado

$$2x - 4 - 2(3x - 1) = 3x - 5 - x$$

$$2x - 4 - 6x + 2 = 2x - 5$$

$$-2 - 4x = 2x - 5$$

$$-2 + 5 = 2x + 4x$$

$$3 = 6x$$

$$\frac{3}{6} = x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Se rompen paréntesis y se agrupan los términos semejantes en cada miembro.

Se realiza la transposición de términos.

Se recomienda dejar la variable en donde quede positiva.

Si es posible se simplifica la respuesta.

Para cualquier tipo de ecuación, independientemente del grado de la misma, se puede realizar la comprobación reemplazando el valor encontrado de la variable en la ecuación original y debe resultar en una identidad.

$$2x - 4 - 2(3x - 1) = 3x - 5 - x \quad \text{Se reemplaza } x = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 5$$

$$1 - 4 - 3 + 2 = 1 - 5$$

$$-4 = -4$$

Ejemplo 2: Resolver la siguiente ecuación de primer grado

$$\frac{5}{6}x - \frac{x}{18} - \frac{3}{4}x = \frac{7}{12}x - \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{5}{6}x - \frac{x}{18} - \frac{3}{4}x = \frac{7}{12}x - \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}\right) \cdot 36 \quad \text{Se multiplica a toda la ecuación por el}$$

$$30x - 2x - 27x = 21x - 8x + 24$$

mínimo común denominador

$$-24 = 12x$$

Se agrupan términos semejantes y se

$$-\frac{24}{12} = x$$

realiza la transposición de términos.

$$-2 = x$$

Se simplifica la respuesta.

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; donde se cumple lo siguiente:

–a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática, con $a \neq 0$.

– ax^2 , es el término cuadrático

–bx, es el término lineal

–c, es el término independiente

Para determinar los valores de a, b y c siempre se debe cuidar que la ecuación esté igualada a cero (Stewart, 2012).

Ejemplo 1: Determinar los valores de a, b y c en la siguiente ecuación cuadrática

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

En este caso, la ecuación se encuentra igualada a cero.

$$a = 1; b = 3; c = -2$$

Ejemplo 2: Determinar el valor de a, b y c en la siguiente ecuación

$$3x^2 + 3 = 4x$$

$$3x^2 - 4x + 3 = 0$$

Se iguala a cero la ecuación

$$a = 3; b = -4; c = 3$$

Cabe mencionar, que existen ecuaciones cuadráticas completas e incompletas. Las ecuaciones cuadráticas completas son aquellas en las que existen los tres términos, mientras que las incompletas son aquellas en las que el término lineal y/o el término independiente son nulos, y cuando esto pasa sus coeficientes adquieren el valor de cero.

Ejemplo 3: Determinar el valor de a, b y c en la siguiente ecuación

$$3x^2 = 2x$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

Se iguala a cero la ecuación

En este caso, no existe el término independiente

$$a = 3; b = -2; c = 0$$

Ejemplo 4: Determinar el valor de a, b y c en la siguiente ecuación

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$a = 2; b = 0; c = -4$$

En este caso, no existe el término lineal

Ejemplo 5: Determinar el valor de a, b y c en la siguiente ecuación

$$-3x^2 = 0$$

$$a = -3; b = 0; c = 0$$

En este caso, no existen el término lineal y el término independiente.

El valor del coeficiente a, nunca puede ser cero en este tipo de ecuaciones pues dejaría de ser una ecuación cuadrática.

Sea cual sea el tipo de ecuación cuadrática, todas se pueden resolver mediante el uso de la fórmula general. Para la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$; la fórmula general es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Donde la expresión que está dentro de la raíz cuadrada, recibe el nombre de discriminante y se representa mediante la letra delta mayúscula (Δ).

Entonces se tiene que $\Delta = b^2 - 4ac$, por lo que la ecuación 1, podría escribirse de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2)$$

Dicho esto, se podría anticipar el número de soluciones de una ecuación cuadrática al analizar el signo del discriminante:

- > 0 ; la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales
- $\Delta = 0$; la ecuación cuadrática tiene una solución real
- $\Delta < 0$; la ecuación cuadrática no tiene solución real

Ejemplo 6: Anticipar el número de soluciones de la siguiente ecuación cuadrática

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$a = 3; b = -4; c = -7$$

Se determinan los valores de a, b y c

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se calcula el valor del discriminante. En

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(-7)$$

este caso el discriminante es mayor a

$$\Delta = 100$$

cero.

$$\Delta > 0$$

Existen dos soluciones

Una vez calculado el discriminante, se puede ocupar dicho valor y reemplazarlo en la ecuación 2 para determinar cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática. A las soluciones de una ecuación cuadrática se las conoce como raíces.

Ejemplo 7: Determinar las raíces de la ecuación cuadrática del ejemplo 6.

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

Estos serían los parámetros de la

$$a = 3; b = -4; c = -7; \Delta = 100$$

ecuación cuadrática planteada

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2(3)}$$

Se reemplazan valores en la ecuación 2

$$x = \frac{4 \pm 10}{6}$$

Se resuelven los términos de la fórmula

$$x_1 = \frac{4 + 10}{6} \quad x_2 = \frac{4 - 10}{6}$$

Se separan en las dos posibles

$$x_1 = \frac{7}{3} \quad x_2 = -1$$

respuestas y se resuelve.

10. Actividad de aprendizaje

10.1. Efectuar las siguientes sumas y restas de fracciones. Recuerde que primero se debe realizar las operaciones dentro de los paréntesis. Simplificar el resultado cuando sea posible.

$$a) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$b) \frac{1}{6} + \frac{2}{4} =$$

$$c) \frac{1}{3} + \frac{3}{6} - \frac{2}{4} =$$

$$d) \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{10} =$$

$$e) \left(1 - \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{2}{10} - 4 \right) =$$

10.2. Realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones entre fracciones.

$$a) \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$b) \frac{13}{5} : \frac{5}{10} =$$

$$c) \frac{2}{9} \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} =$$

$$d) \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} : \frac{2}{3} =$$

$$e) \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{6}{4} \right) : \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{2} \right) =$$

10.3. Realizar las siguientes operaciones combinadas

$$a) 1 + \frac{3}{2} : \frac{3}{5} =$$

$$b) \frac{7}{22} \cdot \frac{33}{9} + \frac{10}{11} =$$

$$c) \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$d) \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) =$$

$$e) \frac{5}{24} : \left(\frac{7}{42} + \frac{9}{14} \right) =$$

10.4. Simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades

$$a) \frac{x^4 y^7}{x^2 y^{11}} =$$

$$b) \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^7}{y^2} \cdot \frac{z^{12}}{z^5} =$$

$$c) \{[(-2)^5]^4\}^2$$

$$d) \frac{2m^4 \cdot 3t^3}{4m^2 \cdot 3t^3}$$

$$e) \frac{[(x)^2]^{3^2}}{2xz} \cdot \frac{(xy)^2 z^8}{z^2} \cdot \frac{z^{-2}}{xy^2 z^5} =$$

10.5. Simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades

$$a) \sqrt[3]{\frac{8a^3}{27b^3}}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{-6}}}$$

$$c) \sqrt{m^3 n^2 p^4} \cdot \sqrt[5]{m^{-2} n^4 p^7} \cdot \sqrt[4]{m^{-2} n^{-1} p^2}$$

$$d) \sqrt{4m^3 p^4} \cdot \sqrt[3]{m^{-4} p^2 x} \cdot \sqrt[4]{2mp^5 x^{-2}}$$

$$e) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{xy^3}}}$$

10.6. Aplicar propiedades y resolver

$$a) \log_3(1/27) = x$$

$$b) \log_3(81) = x$$

$$c) \log_3 x = 3$$

$$d) \log_8 x = \frac{1}{3}$$

$$e) \log_{49} \sqrt{7} = x$$

10.7. Realizar los siguientes productos notables

a) $(9 - 4m)^2 =$

b) $(7a^2b^3 + 5x^4)^2 =$

c) $(x + y - z)^2 =$

d) $(y + 2y^2 - y^3)^2 =$

e) $(a^x - 6)(a^x - 5) =$

f) $(a + 2)(a - 3)(a - 2)(a + 3) =$

g) $(4n + 3)^3 =$

h) $(a^2 - 2b)^3 =$

10.8. Factorizar las siguientes expresiones algebraicas

a) $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3 =$

b) $3x(x - 2) - 2y(-2 + x) =$

c) $49x^2y^6z^{10} - a^{12} =$

d) $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4 =$

e) $a^2 - 13a + 40 =$

f) $m^8 - n^4 =$

g) $8m^6 - 27n^9 =$

h) $54x^8 + 128x^2 =$

i) $6x^2 - 7x - 3 =$

10.9. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2(x - 2) = -(4 - x)$

b) $10 + 5(x - 3) = 3(x + 1)$

c) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{6} + x = 21$

d) $\frac{x}{3} + 10 = \frac{x}{5} + 16$

e) $\frac{5x}{8} - 5(x - 20) = \frac{-2x + 18}{6}$

f) $\frac{2x + 1}{4} - \frac{3x}{9} - 2 = \frac{3x - 2}{4}$

10.10. Calcular el discriminante y determinar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 7x + 3 = 0$

b) $x^2 - 16x + 64 = 0$

c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $x^2 - 6x + 13 = 0$

e) $2x^2 - x = 3$

10.11. Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $11x + 21 = 2x^2$

b) $3(x - 1)(x + 2) = 3x - 6$

c) $2x^2 - 1 = 1 - x - x^2$

d) $(x - 2)^2 = 3$

e) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

11. Autoevaluación

Resolver de manera individual el siguiente cuestionario y elegir la opción que considere correcta.

1. El resultado de la siguiente operación es:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{10} =$$

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\frac{2}{15}$

2. El resultado de la siguiente expresión es:

$$\left(\frac{3}{18} : \frac{6}{2}\right) : \left(\frac{4}{5} : \frac{8}{15}\right) =$$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

3. Determinar el resultado de la siguiente operación combinada

$$\frac{14}{9} \cdot \frac{3}{21} : \left(\frac{7}{42} + \frac{2}{14}\right) \cdot \frac{6}{7} - 2 =$$

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 10

D. 6

4. Simplificar aplicando propiedades

$$\frac{[a^2]^{-3}}{3abc} \cdot \frac{(cb)^2 a^5}{ab^{-2}} \cdot \frac{c^{-1}}{(3a)^{-2} b^3} =$$

- A. $\frac{1}{2a}$
- B. $\frac{3ac}{b}$
- C. $\frac{3}{a}$
- D. $\frac{b}{ac}$

5. Simplificar utilizando propiedades

$$\sqrt{x^2 y^3} \cdot \sqrt[5]{x^{-2} y^{-2} z} \cdot \sqrt[4]{x^{-3} y^{-5} z^{-2}}$$

- A. $\frac{1}{\sqrt[20]{x^3 y^3 z^6}}$
- B. $\sqrt[20]{x^3 y^6 z^6}$
- C. $\sqrt[20]{x^6 y^5 z^{-3}}$
- D. $\frac{1}{\sqrt[20]{x^{-3} y^5 z^6}}$

6. Hallar el valor del siguiente logaritmo

$$\log_x 125 = 3$$

- A. 0
- B. 5
- C. -5
- D. 3

7. Aplicar las propiedades de logaritmos para determinar la equivalencia de la siguiente expresión

$$3 \log(2) + 2 \log(3) =$$

A. $\log(56)$

B. $5 \log(6)$

C. $5 \log(5)$

D. $\log(72)$

8. Aplicar los casos oportunos de factorización y simplificar la siguiente expresión

$$\frac{3x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + x}{3x}$$

A. $x + 1$

B. $x - 1$

C. x

D. $3x$

9. Resolver la siguiente ecuación de primer grado

$$\frac{2(2x + 1)}{3} - \frac{3 + x}{8} - 3x = \frac{-2(-6x + 9)}{4}$$

A. 2

B. -1

C. 1

D. $\frac{2}{5}$

10. Determinar las raíces de la siguiente ecuación cuadrática

$$-2x^2 - \frac{3 - x \cdot (x + 2)}{3} = -1 + \frac{x}{2}$$

A. $x_1 = 0$; $x_2 = -10$

B. $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{10}$

C. $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{10}$

D. $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{10}$

12. Evaluación final

La evaluación final se llevará a cabo de manera presencial en las instalaciones del Instituto Superior Tecnológico Vicente León. La evaluación constará de 10 preguntas similares a la autoevaluación que se encuentra en este documento. Cada pregunta tendrá una calificación de 1 punto para sumar un total de 10 puntos.

13. Solucionario de las autoevaluaciones

Resolver de manera individual el siguiente cuestionario y elegir la opción que considere correcta.

1. El resultado de la siguiente operación es:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{10} =$$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2/15

2. El resultado de la siguiente expresión es:

$$\left(\frac{3}{18} \cdot \frac{6}{2}\right) : \left(\frac{4}{5} : \frac{8}{15}\right) =$$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

3. Determinar el resultado de la siguiente operación combinada

$$\frac{14}{9} \cdot \frac{3}{21} : \left(\frac{7}{42} + \frac{2}{14}\right) \cdot \frac{6}{7} - 2 =$$

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 10

D. 6

4. Simplificar aplicando propiedades

$$\frac{[a^2]^{-3}}{3abc} \cdot \frac{(cb)^2 a^5}{ab^{-2}} \cdot \frac{c^{-1}}{(3a)^{-2} b^3} =$$

A. $\frac{1}{2a}$

B. $\frac{3ac}{b}$

C. $\frac{3}{a}$

D. $\frac{b}{ac}$

5. Simplificar utilizando propiedades

$$\sqrt{x^2y^3} \cdot {}^5\sqrt{x^{-2}y^{-2}z} \cdot {}^4\sqrt{x^{-3}y^{-5}z^{-2}}$$

A. $\frac{1}{\sqrt[20]{x^3y^3z^6}}$

B. $\sqrt[20]{x^3y^6z^6}$

C. $\sqrt[20]{x^6y^5z^{-3}}$

D. $\frac{1}{\sqrt[20]{x^{-3}y^5z^6}}$

6. Hallar el valor del siguiente logaritmo

$$\log_x 125 = 3$$

A. 0

B. 5

C. -5

D. 3

7. Aplicar las propiedades de logaritmos para determinar la equivalencia de la siguiente expresión

$$3 \log(2) + 2 \log(3) =$$

A. $\log(56)$

B. $5 \log(6)$

C. $5 \log(5)$

D. $\log(72)$

8. Aplicar los casos oportunos de factorización y simplificar la siguiente expresión

$$\frac{3x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + x}{3x}$$

A. $x + 1$

B. $x - 1$

C. x

D. $3x$

9. Resolver la siguiente ecuación de primer grado

$$\frac{2(2x + 1)}{3} - \frac{3 + x}{8} - 3x = \frac{-2(-6x + 9)}{4}$$

A. 2

B. -1

C. 1

D. $\frac{2}{5}$

10. Determinar las raíces de la siguiente ecuación cuadrática

$$-2x^2 - \frac{3 - x \cdot (x + 2)}{3} = -1 + \frac{x}{2}$$

A. $x_1 = 0$; $x_2 = -10$

B. $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{10}$

C. $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{10}$

D. $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{10}$

14. Glosario

Álgebra: Rama de las matemáticas que estudia las operaciones y las propiedades matemáticas.

Binomio: Polinomio que consta de dos términos.

Coficiente: Número que multiplica a una variable en un término algebraico.

Conjunto: Colección de elementos. En álgebra, se utilizan conjuntos para representar grupos de números.

Despejar: Resolver una ecuación para encontrar el valor de una variable.

Ecuación: Expresión matemática que establece la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Exponente: Número que indica la cantidad de veces que se multiplica una variable por sí misma.

Factorizar: Descomponer una expresión algebraica en factores.

Fracción algebraica: Fracción en la que el numerador y/o el denominador son expresiones algebraicas.

Inverso aditivo: Número que, sumado a otro número, da como resultado cero.

Inverso multiplicativo: Número que, multiplicado por otro número, da como resultado uno.

Ley de los signos: Reglas para operar con números positivos y negativos.

Monomio: Polinomio que consta de un solo término.

Números irracionales: Números que no pueden expresarse como fracciones.

Números primos: Números mayores que 1 que no tienen divisores positivos además de 1 y sí mismos.

Números enteros: Números positivos, negativos y el cero, sin parte decimal.

Polinomio: Expresión algebraica compuesta por términos sumados o restados, donde cada término es el producto de una constante y una variable elevada a un exponente entero no negativo.

Propiedad distributiva: Propiedad que establece que la multiplicación distribuye sobre la suma o la resta.

Raíz cuadrada: Operación matemática que encuentra el número que, elevado al cuadrado, da como resultado otro número.

Variable: Símbolo que representa un número desconocido o que puede tomar diferentes valores.

15. Referencias bibliográficas

- Angel, A. R. (2007). Algebra elemental (6a ed.). Pearson Educación.
- Bonilla, M. L. (2012). Potenciación y radicación.
- Medina, H. (2022). Números reales. Enciclopedia de Matemática. <https://enciclopediadematematica.com/numeros-reales/>
- Stewart, J. (2012). Precálculo Matemáticas para el cálculo.
- Swokowski, E. W. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.

16. Anexos o recursos

El siguiente material servirá como apoyo para que el estudiante pueda consultar y reforzar los contenidos presentados en esta guía.

16.1. Links de canales de YouTube

- <https://www.youtube.com/@julioprofe>
- <https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex>
- <https://www.youtube.com/@MateFacilYT>

16.2. Libros descargables

- **Calculo 5eD Schaum Frank Ayresmerged.**

Link: www.academia.edu. https://www.academia.edu/52192959/Calculo_5ed_Schaum_Frank_Ayresmerged

- **Matemáticas básicas.**

Link: https://www.utadeo.edu.co/sites/tadeo/files/node/publication/field_attached_file/pdf_matematicas_basicas-completo-_09-15.pdf



INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO
VICENTE LEÓN

Guía

general de estudio
de la **asignatura**

Agosto 2024

ISBN: 978-9942-676-75-7



9 789942 676757