INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO PELILEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS Y CÁLCULO

Ing. María Fernanda Oñate Mg.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS Y CÁLCULO

Directorio editorial institucional

Dr. Rodrigo Mena Mg. Rector
Mg. Sandra Cando Coordinadora Institucional
Mg. Oscar Toapanta Coordinador de I+D+i
Ing. Johanna Iza Líder de Publicaciones

Diseño y diagramación
Mg. Belén Chávez
Mg. Santiago Mayorga

Revisión técnica de pares académicos
Ana del Cisne Ramírez Rivera
IST PELILEO
Correo: adramirez@institutos.gob.ec
Johanna Estefanía Iza Iza
IST PELILEO
Correo: jeiza@institutos.gob.ec

ISBN: 978-9942-686-21-3
Primera edición
Agosto 2024
https://istp.edu.ec

AUTORES

Ing. Fernanda Oñate, Mg.

DOCENTE

Ingeniera en Mecatrónica y Magíster en Docencia Universitaria, con destacada participación en proyectos de investigación de la carrera de electromecánica en el Instituto. Ha participado como docente de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE. Se ha destacado como docente investigadora dentro de la institución.
Docente actualmente en el Instituto Superior Tecnológico Pelileo carreras de Electromecánica y Electricidad y Potencia; de igual forma como coordinadora de subnivel en la Unidad Educativa Juan León Mera "La Salle".

PRÓLOGO

Las matemáticas son una de las disciplinas más fundamentales en el desarrollo del conocimiento humano. Desde la antigüedad, han sido utilizadas para resolver problemas prácticos y teóricos, sirviendo como lenguaje universal en ciencias, ingeniería, economía y muchas otras áreas. Este curso de Fundamentos de Matemáticas y Cálculo tiene como objetivo proporcionar a los estudiantes una base sólida en conceptos matemáticos esenciales, así como las herramientas necesarias para abordar problemas complejos mediante el cálculo.

El estudio de los fundamentos matemáticos abarca temas como la aritmética, álgebra, geometría y teoría de conjuntos, estableciendo un marco que permite el entendimiento de diseños en la industria de la moda dependen de estas dos disciplinas fundamentales de estructuras más avanzadas. Por otro lado, el cálculo, tanto diferencial como integral, permite el análisis de cambios y áreas bajo curvas, habilidades clave en diversas aplicaciones.

A lo largo de este curso, se fomentará el pensamiento crítico y la resolución de problemas, preparando a los estudiantes no solo para el éxito académico, sino también para su futura trayectoria profesional. Con una metodología que combina teoría con ejercicios prácticos, se espera que los participantes desarrollen una apreciación más profunda por la belleza y la utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO PELILEO

TOMO 1:

Matemáticas Aplicadas

Ing. María Fernanda Oñate Mg.

CONTENIDOS

01

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

UNIDAD UNO

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

En esta guía, se Identifican las leyes aplicadas para resolución de ejercicios de Potenciación y Radicación. Se realiza ejercicios matemáticos aplicando operaciones básicas como suma, resta, multiplicación, división. Se reconoce los distintos casos de Factoreo para aplicar en la resolución de ejercicios matemáticos, finalmente, se resuelven ecuaciones de dos Variables aplicando los métodos de sustitución, reducción, igualación, Cramer, gráfico

1.1. Leyes de potenciación y radicación

Es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de la otra. Las funciones son una herramienta matemática fundamental que permite relacionar un conjunto de números con otro conjunto de números.

POTENCIACIÓN: Es una expresión matemática que incluye dos términos denominados: Base a y exponente n.

$$a^n = a.a.a.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.a\ (n\ veces)$$

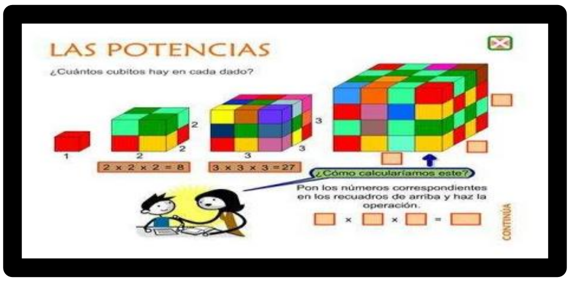
Ejemplo:

$$5^2 = 5\ x5$$

$$3^6 = 3x3\ x3x3x3x3$$

Ejemplo:

Al observar la figura te darás cuenta cómo representar las potencias de forma sencilla,



sólo debes identificar la base y exponente, veamos cada uno de los cubos:

Cubo n°1: 1

Cubo n°2: 2^3=2.2.2=8

Cubo n°3: 3^3=3.3.3=27

¿Cómo calcularíamos el cubo n°4?

Propiedades de la potenciación:

Propiedad 1. Potencia de Exponente 0.

Toda potencia de exponente cero y base distinta de cero es igual uno (1). Entonces:

$$a^0 = 1 \text{ y } a \neq 0$$

Propiedad 2. Potencia de Exponente 1

Cualquier cantidad elevada al exponente 1 es igual a ella misma.

$$a^1 = a$$

Propiedad 3. Multiplicación de potencias de igual base

El producto de dos o más potencias de igual base «a», se conserva la base y se suman los exponentes.

$$a^n x\ a^m = a^{n+m}$$

$$9^3 \cdot 9^2 = 9^{3+2} = 9^5$$

Propiedad 4. División de Potencias de Igual Base

Para dividir potencias de igual base, se escribe la misma base y se restan los exponentes

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$5^4 / 5^2 = 5^{4-2} = 5^2 = 5.5 = 25$

Propiedad 5. Potencia de una potencia

Para calcular la potencia de una potencia se escribe la misma base "a" y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

$(5^3)^2 = 5^6$

Propiedad 6. Potencia de un producto

Si tenemos una potencia donde en la base hay un producto de 2 cantidades, el exponente n se reparte para cada una de las bases.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$(5 . 4)^3 = 5^3 . 4^3$

Propiedad 7. Potencia de un cociente

La potencia de un cociente es igual al numerador y denominador elevado al exponente de dicha potencia, es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$(3/5)^2 = 3^2/5^2$

Propiedad 8. Potencia de exponente negativo

Una potencia que tenga exponente negativo se cambia de lugar, es decir al denominador de este modo su exponente automáticamente cambiara a ser positivo.

$a^{-1} = 1/a$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedad 9. Si tenemos una fracción con 1 en el numerador y en numerador la base con exponente negativo esto es igual al denominador con exponente positivo.

Ejemplos:

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Propiedad 10. Si tenemos una fracción elevada a un exponente negativo es igual a la fracción invertida con el exponente positivo.

$$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^{+n}$$

Propiedad 11. Base positiva con exponente par o impar el resultado es positivo

$$5^4 = 5x5x5x5 = 625$$

$$4^3 = 4x4x4 = 64$$

Propiedad 12. Si tenemos una base – elevado a un exponente par el resultado es positivo.

$$(-7)^2 = (-7)(-7) = 49$$

Propiedad 13. Si tenemos una cantidad negativa elevada a un exponente impar da resultado una cantidad negativa.

$$(-6)^3 = (-6)(-6)(-6) = -216$$

EJERCICIOS RESUELTOS		
1.	Aplicar la propiedad que corresponde $2^3.2^2=$	**Solución:** $2^3.2^2= 2^5 =2.2.2.2.2=32$ Para efectuar **multiplicación de potencias de igual base,** se escribe la misma base y se suman los exponentes.
2.	Aplicar la propiedad que corresponde $3^5/3^2=$	**Solución:** $3^5/3^2= 3^{5-2} =3^3=3.3.3 =27$ **División de potencia de igual base**, se escribe la misma base y se restan los exponentes.
3.	Aplicar la propiedad que corresponde $5^0=$	**Solución:** $5^0= 1$ **Exponente 0, todo número elevado a la cero(0) es igual a 1**
4.	Aplicar la propiedad que corresponde $(2.4)^4=$	**Solución:** $(2.4)^4= 2^4. 4^4$ En la **potencia de un producto**, se elevan ambos factores al exponente dado.
5.	Aplicar la propiedad que corresponde $(7/8)^2= 7^2/8^2$	**Solución:** $(7/8)^2= 7^2/8^2$ **Potencia de un cociente** se elevan Numerador y denominador al exponente dado.
6.	Aplicar la propiedad que corresponde $5^{-2} =$	**Solución:** $5^{-2}= 1/5^2= 1/5.5=1/ 25$ La **potencia con exponente negativo**, se cambia al denominador con exponente Positivo.
7.	Aplicar la propiedad que corresponde $3^3.3^2.3^4=$	**Solución:** $3^3.3^2.3^4= 3^9$ **Multiplicación de potencia de igual base**
9.	Aplica la propiedad que corresponde $80^0=$	**Solución:** $80^0= 1$ **Todo número ele vado a la cero (0) es igual a 1.**
10	Aplica la propiedad que corresponde $4^5/4^2=$	**Solución:** $4^5/4^2=4^{5-2}=4^3$ **División de potencia de igual base** ,se escribe la misma base y se restan los exponentes

RADICACIÓN

Es una operación matemática inversa a la potenciación, cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz, cuando se conocen otras dos llamadas radicando e índice.

SIGNO DE LA RAÍZ: Se llama radical: √

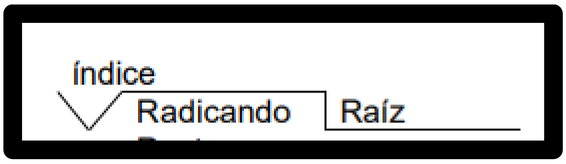
TÉRMINOS DE UNA RAÍZ:

Radicando: Es el número al que se le quiere hallar la raíz. Se coloca debajo del radical.

Raíz: Es el resultado de la operación.

Índice: Es el número al que hay que elevar la raíz para que nos dé el radicando.

El índice 2 no se expresa.



Leyes de exponentes de Radicación.

Raíz de una Potencia: Para extraer la raíz de una Potencia se escribe la misma base y el exponente es la división del exponente de la base entre el índice del radical.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = R$$

$$\sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$$

Potencia de una raíz: Es igual a la raíz de potencia de potencia.

$$(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

$$(\sqrt[4]{a^3})^5 = \sqrt[4]{a^{15}}$$

Raíz de un Producto: Se lo realiza extrayendo la raíz a cada factor.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{a^{12}b^{27}} = \sqrt[3]{a^{12}}\ \sqrt[3]{b^{27}}$$

$$= a^{12/3}b^{27/3}$$

$$= a^4b^9$$

Raíz de un Cociente: Se realiza extrayendo la raíz tanto del numerador como del denominador

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{b^{27}}} = \frac{\sqrt[3]{a^{12}}}{\sqrt[3]{b^{27}}}$$

$$= \frac{a^{12/3}}{b^{27/3}}$$

$$= \frac{a^4}{b^9}$$

Exponente Fraccionario: Toda cantidad elevada a un exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo índice es igual al denominador y cuya cantidad subradical elevada a un exponente es igual al numerador.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$$

Introducción de un factor a un Radical: Se multiplica el exponente del factor por el índice del subradical y esta cantidad afecta al radical.

$$a^m\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}b}$$

1.2. Expresiones algebraicas

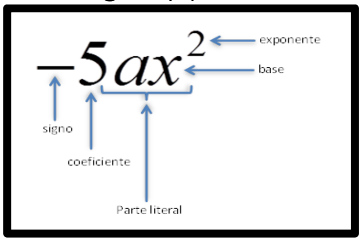
Es determinar el valor que se obtiene al sustituir la variable de la ecuación por un valor numérico o expresión algebraica. Ejemplo:

De acuerdo a como se observa en los siguientes problemas desarrollados evaluar la función en los valores.

Es la rama de las matemáticas en la cual se estudia una cantidad del modo más general posible considerando los signos utilizados en el algebra

- Signos de operación: En este grupo están incluidos los signos de las operaciones básicas como: la suma (+), resta (-), división (/), multiplicación (*), potenciación (a^2) y radicación ($\sqrt{a}$):
- Signos de relación: En este grupo están incluidos los signos que ayudan a comparar dos cantidades entre sí como: mayor que (>), menor que (<) y el igual (=)
- Signos de agrupación. En este grupo están incluidos los signos que ayudan a identificar las separaciones de expresiones algebraicas como: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }.

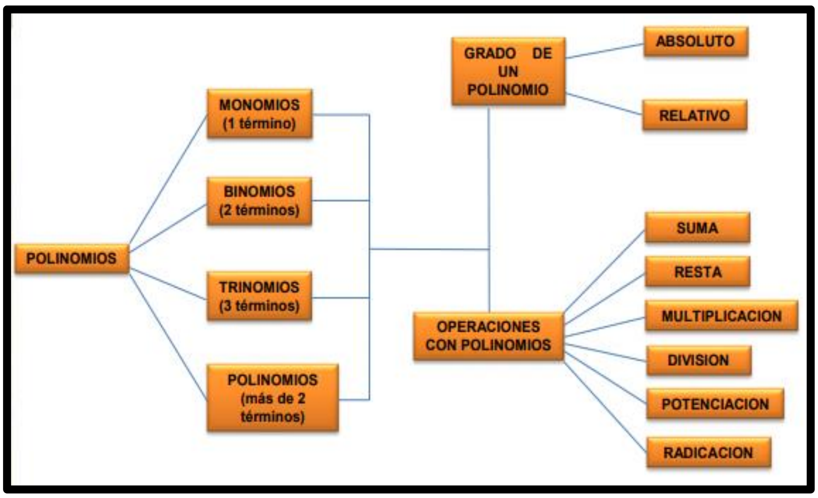
- Una expresión algebraica es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas. Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Una expresión algebraica está compuesta por: Términos, exponente, coeficiente, signo y parte literal.



CLASIFICACIÓN EXPRESIÓN ALGEBRAICA

- **Monomio:** Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.
- **Binomio:** Un binomio es una expresión algebraica formada por dos monomios.
- **Trinomio:** Un trinomio es una expresión algebraica formada por tres monomios
- **Polinomio:** Un polinomio es una expresión algebraica formada por más de un monomio.

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Grado absoluto de un término: Se denomina grado absoluto de un término algebraico a la suma de los exponentes de sus factores literales. Ejemplos

$3x^3$, Este término es de grado tres.

$-5x^2y^3$, Este término es de grado 5, porque la suma de los exponentes de sus factores literales es 2 + 3 = 5

Grado relativo: Está dado por el exponente de la variable considerada (con relación a una letra). Ejemplos

- $5x^2y^3$: Es de 2^{do} grado con respecto a la variable x
- $5x^2y^3$: Es de 3^{er} grado con respecto a la variable y

EJERCICIOS CON OPERACIONES ALGEBRAICAS

SUMA

Es la operación matemática que tiene como objetivo reunir dos o más monomios en una sola expresión. Ejemplo.

Sumar los siguientes monomios: $3a^2b$; $4ab^2$; $7ab^2$; $6b^3$; a^2b

Como podemos observar en los monomios planteados en primera instancia se debe colocar los términos que sean semejantes entre si uno a continuación de otro obteniendo lo siguiente.

$$(3a^2b + a^2b) + (4ab^2 + 7ab^2) + 6b^3$$

Cuando tengamos identificado los términos semejantes procedemos a operar independientemente cada expresión, nótese que el termino $6b^3$ no tiene ningún termino semejante por lo cual ese término iría al final de la expresión.

El resultado final seria.

$$4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$$

RESTA

Es la operación matemática que tiene como objetivo disminuir solamente dos expresiones algebraicas en uno solo. Ejemplo.

Restar de 4x -3y + z, resta 2x + 5z - 6

$$(4x - 3y + z) - (2x + 5z - 6)$$

Como podemos observar en el ejemplo es una resta en los cuales solo tenemos dos términos semejantes en el minuendo y sustraendo, para el cual se procede a colocar los términos semejantes uno bajo el otro y los términos que no sean semejantes desplazarlos un espacio a la derecha.

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x & -\ 3y & +\ z & \\ - & 2x & & +\ 5z & -\ 6 \end{array}$$

El signo menos aplica para cada término de sustraendo una aplicación de la ley de los signos y de esa manera poder obtener el resultado final de la operación. Obteniendo lo siguiente.

$$4x \ - \ 3y \ + \ z$$

$$-2x \quad - 5z \quad + 6$$

$$2x \; - \; 3y \; - 4z \; + 6$$

MULTIPLICACIÓN

Esta operación matemática tiene por objeto dado 2 cantidades llamadas multiplicando y multiplicador hallar una tercera cantidad llamada producto total.

En esta operación matemática el orden de los factores no altera el producto.

$A \times B = B \times A$ **Ley conmutativa**

Debemos considerar la ley de los signos al momento de realizar operaciones matemáticas.

MULTIPLICACIÓN					
	+	.	+	=	+
	-	.	-	=	+
	+	.	-	=	-
	-	.	+	=	-

Ejemplo: Multiplicación de dos monomios

Multiplicar $3x^2y^2$ por $x^{m-1}\, y^{m+2}$

$$(3x^2y^2) * (x^{m-1}\, y^{m+2})$$

Iniciamos multiplicando los coeficientes, en el caso del multiplicador el coeficiente es 1 obteniendo lo siguiente:

$$(3x^2y^2) * (1\; x^{m-1}\, y^{m+2})$$

Y agrupamos los términos de la parte literal que se tengan en común, no olvides que en la multiplicación se conserva la base y se suma los exponentes. Obteniendo lo siguiente.

$$3\;[(x^2\, x^{m-1})\;\;(y^2\, y^{m+2})]$$

$$3\;[(x^{2+m-1})\;\;(y^{2+m+2})]$$

$$3\;[(x^{m+1})\;\;(y^{m+4})]$$

$$3\;x^{m+1}\, y^{m+4}$$

Ejemplo: Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Multiplicar: $3x^2 – 6x + 7$ por $40x^2$

En este caso el monomio se multiplica por cada elemento del polinomio, considere aplicar la ley de los signos para cada caso.

$$(4ax^2) * (3x^2 – 6x + 7)$$

$$(4ax^2 * 3x^2) - (4ax^2 * 6x) + (4ax^2 * 7)$$

$$12ax^4 – 24ax3 + 28ax^2$$

DIVISIÓN

Esta operación matemática tiene por objeto dado 2 cantidades llamadas dividendo y divisor hallar una tercera cantidad llamado cociente.

DIVISIÓN					
	+	/	+	=	+
	-	/	-	=	+
	+	/	-	=	-
	-	/	+	=	-

Se debe considerar de igual forma los signos que se tengan tanto en el numerador y denominador.

La ley de exponentes: esta ley es muy empleada al momento de dividir monomios o polinomios y al igual que la multiplicación se conserva la base, pero en este caso se restan los exponentes.

Ejemplo: Multiplicación de dos monomios

Dividir $30x^5y^4$ para $3x^4y^3$

$$\frac{30x^5y^4}{3x^4y^3}$$

Empezamos dividiendo los coeficientes del numerador y denominador respectivamente. Obteniendo lo siguiente.

$$10\,\frac{x^5y^4}{x^4y^3}$$

Luego llevamos los exponentes del denominador al numerador considerando que en la división se conserva la base y se restan los exponentes para cada parte literal.

$$10\,x^{5-4}\,y^{4-3}$$

Y realizamos la resta obteniendo el siguiente cociente.

$$10\,x\,y$$

Ejemplo: Dividir un monomio para un polinomio.

Multiplicar $3a^3 - 6a^2b + 9ab^2$ para $3a$

$$\frac{3a^3 - 6a^2b + 9ab^2}{3a}$$

En este caso separamos el denominador y lo dividimos para cada término del numerador.

$$\frac{3a^3}{3a} - \frac{6a^2b}{3a} + \frac{9ab^2}{3a}$$

$$(a^{3-1}) - (2a^{2-1}b) + (3a^{1-1}b^2)$$

$$a - 2ab + 3b^2$$

1.3. Productos notables

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado. Sin embargo, existen productos algebraicos que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Estos productos reciben el nombre de productos notables.

Consideraciones previas:

Son polinomios que se obtienen de la multiplicación entre dos o más polinomios que poseen características especiales o expresiones particulares, cumplen ciertas reglas fijas; es decir, el su resultado puede ser escrito por simple inspección sin necesidad de efectuar la multiplicación.

- Cuadrado de una suma de dos términos o cantidades.
  $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
- Cuadrado de una diferencia de dos términos o cantidades.
  $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
- Producto de una suma de dos términos por su diferencia.
  $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
- Producto de dos binomios que tienen un término en común.
  $$(a + m)(a + n) = a^2 + (m + n)a + mn$$
- Producto de dos binomios de la forma. **$(ax + c)(bx + d)$**
  $$(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + bc)x + cd$$
- Cubo de un binomio.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Teoría de productos notables

Cuadrado de una suma de dos términos o cantidades.

El desarrollo del cuadrado del binomio a + b se puede obtener de dos formas diferentes.

1. Multiplicando término a término:

Separamos en dos términos semejantes el binomio

$$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$$

Multiplicamos término a término cada elemento del binomio.

$$(a + b)\ (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

Sumando términos semejantes obtendríamos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con la nomenclatura del desarrollo directamente.

La forma de expresar un binomio cuadrado es la siguiente ¨El primer término elevado al cuadrado más el doble producto del primer término por el segundo término y más el segundo término elevado al cuadrado¨

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de una diferencia de dos términos o cantidades.

1. Multiplicando término a término:

Separamos en dos términos semejantes el binomio

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$$

Multiplicamos término a término cada elemento del binomio.

$$(a - b)\ (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

Sumando términos semejantes obtendríamos:

$$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Con la nomenclatura del desarrollo directamente.

La forma de expresar un binomio cuadrado es la siguiente ¨El primer término elevado al cuadrado menos el doble producto del primer término por el segundo término y más el segundo término elevado al cuadrado¨

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Producto de una suma de dos términos por su diferencia.

A este producto también se los conoce como dos binomios conjugados ya que solo difieren en su signo un término del otro.

Esto implica que la suma de dos binomios

$(a + b)$

Multiplicado por su diferencia **$(a - b)$**

Es igual a la diferencia de sus cuadrados

$a^2 - b^2$

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

Producto de dos binomios que tienen un término en común.

Un producto de dos polinomios que contengan un término en común tanto en cantidad como en signo.

$$(a + m)\ (a + n)$$

Se desarrollan como una multiplicación termino a término normal.

$$(a + m)(a + n) = a^2 + am + an + mn$$

Consecuencia del producto obtenido debemos agrupar los términos semejantes, en este y todos los casos solo se agrupan los términos de la entidad común en este caso los términos que contengan la variable a.

$$(a + m)(a + n) = a^2 + a(m + n) + mn$$

Producto de dos binomios de la forma. (ax + c) (bx + d)

Como podemos apreciar este tipo de producto notable es de la misma forma que el producto anterior, con la única diferencia es que pueden tener diferentes cantidades, pero si mantener el mismo signo.

Se desarrollan como una multiplicación termino a término normal.

$$(ax + c)(bx + d) = axbx + axd + cbx + cd$$

Consecuencia del producto obtenido debemos agrupar los términos semejantes, en este y todos los casos solo se agrupan los términos de la entidad común en este caso los términos que contengan la variable a.

$$(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + bc)x + cd$$

Cubo de un Binomio.

El desarrollo del cubo de un binomio (a + b) se puede obtener de dos formas diferentes.

1. Multiplicando el binomio por el cuadrado del mismo:

Separamos en dos términos semejantes el binomio.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

Resolvemos el cuadrado del binomio.

$$(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

Multiplicamos término a término cada uno de los elementos:

$$(a + b)^3 = aa^2 + 2aab + ab^2 + ba^2 + 2abb + b\,b^2$$

Agrupando términos semejantes.

$$(a + b)^3 = aa^2 + (2a^2b + ba^2) + (ab^2 + 2ab^2) + bb^2$$

Obteniendo lo siguiente

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Con la nomenclatura del desarrollo directamente.

La forma de expresar un binomio cuadrado es la siguiente ¨El primer término elevado al cubo más el triple producto del primer término elevado al cuadrado por el segundo término, más el triple producto del primer término por el segundo término elevado al cuadrado y más el segundo término elevado al cubo¨

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo de un Binomio.

El desarrollo del cubo de un binomio (a - b) se puede obtener de dos formas diferentes.

1. Multiplicando el binomio por el cuadrado del mismo:

Separamos en dos términos semejantes el binomio

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$$

Resolvemos el cuadrado del binomio.

$$(a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

Multiplicamos término a término cada uno de los elementos:

$$(a + b)^3 = aa^2 - 2aab + ab^2 - ba^2 + 2abb - bb^2$$

Agrupando términos semejantes.

$$(a + b)^3 = aa^2 - (2a^2b + ba^2) + (ab^2 + 2ab^2) - bb^2$$

Obteniendo lo siguiente

$$(a + b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2. Con la nomenclatura del desarrollo directamente.

La forma de expresar un binomio cuadrado es la siguiente ¨El primer término elevado al cubo menor el triple producto del primer término elevado al cuadrado por el segundo término, más el triple producto del primer término por el segundo término elevado al cuadrado y menos el segundo término elevado al cubo¨

$$(a + b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Cubo de un Trinomio.

El desarrollo del cubo de un trinomio (a + b + c) se obtiene multiplicando este trinomio por su cuadrado.

Multiplicando el binomio por el cuadrado del mismo:

$$(a + b + c)^3 = (a + b + c)\,(a + b + c)^2$$

Resolvemos el cuadrado del trinomio.

$$(a + b + c)*(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$$

Multiplicamos término a término cada uno de los elementos:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b + 2a^2c + 2abc + a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 + 2abc + 2b^2c + a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + 2ac^2 + 2bc^2$$

Agrupando términos semejantes.

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

A continuación, estudiaremos los casos más utilizados de factorización y un breve significado del tema.

Descomposición de factores

Factorización. - Expresar número o una expresión algebraica como producto de factores primos que, al multiplicarlos, dan como resultado dicho número o expresión.

Caso 1: Factor común.

Característica y cuando aplicarlo.

- Se aplica en binomios, trinomios y polinomios de cuatro términos o más. No aplica para monomios.
- Es el primer caso que se debe inspeccionar cuando se trata de factorizar un polinomio.
- El factor común es aquello que se encuentra multiplicando en cada uno de los términos. Puede ser un número, una letra, varias letras, un signo negativo, una expresión algebraica (encerrada en paréntesis) o combinaciones de todo lo anterior.

Cómo realizar la factorización.

- De los coeficientes de los términos, se extrae el MCD (Máximo Común Divisor) de ellos.
- De las letras o expresiones en paréntesis repetidas, se extrae la de menor exponente.

- Se escribe el factor común, seguido de un paréntesis donde se anota el polinomio que queda después de que el factor común ha abandonado cada término.

Ejemplos:

1. Se debe comenzar identificando el elemento común que tienen todos los factores, en este caso el literal X.

$$3x^4 - 2x^2 + x^2 - 2x =$$

Se procede a sacar una x, y bajar un grado a cada exponente. Obteniendo lo siguiente.

$$x\,(3x^3 - x^2 + x - 2)$$

Caso 2: Factor común por agrupación de términos.

Característica y cuando aplicarlo.

- Se aplica en polinomios que tienen 4, 6, 8 o más términos (siempre que el número sea par) y donde ya se ha verificado que no hay factor común (caso 1).

Cómo realizar la factorización.

- Se forman grupos de igual número de términos, buscando que exista alguna familiaridad entre los términos agrupados (es decir, que tengan rasgos comunes).
- La agrupación se hace colocando paréntesis.
- ¡CUIDADO! Deben cambiarse los signos de los términos encerrados en el paréntesis si éste queda precedido por signo negativo.
- Se extrae factor común de cada grupo formado (es decir, aplicamos el caso 1 en cada expresión encerrada en paréntesis).

2. Se debe comenzar identificando el elemento común que tienen todos los factores, en este caso el literal x^2 ya que es el elemento que contiene cada término.

$$x^5 - 3x^3 + x^2 =$$

Se procede a sacar una x, y bajar un grado a cada exponente. Obteniendo lo siguiente.

$$x^2\,(x^3 - 3x + 1)$$

Otros ejemplos

$8mx + 18x^2y - 258x^3y^2$	$= 2x(4m + 9xy - 129x^2y^3)$
$44mx^8 + 121m^2x^4 - 88m^3x^5$	$= 11mx^4(4x^4 + 11m - 8m^2x)$
$13av - 156a + 130ax$	$= 13a(v - 12 + 10x)$

- Por último, se extrae factor común de toda la expresión (es decir, nuevamente se aplica el caso 1; en esta ocasión, el factor común es una expresión encerrada en paréntesis)

Ejemplos:

Factorizar el siguiente polinomio:

$$px + mx + py + my$$

Nótese que no existe factor común en este polinomio de cuatro términos. Entonces, formamos grupos de dos términos:

$$= (px + mx) + (py + my)$$

Extraemos factor común de cada grupo formado:

$$= x(p + m) + y(p + m)$$

Por último, extraemos factor común de toda la expresión:

$$= (p + m)(x + y)$$

Ejemplo:

$$15d^2 - 21cd^2 + 30dc - 24cc$$

Iniciamos sacando un factor numérico común entre los elementos de los términos planteados, en este caso el numero 3

$$= 3(5d^2 – 7cd + 10dc – 14cc)$$

Agrupamos entre términos que tengan más literales en común

$$=3[(5d^2 – 7cd)+ (10dc – 14cc)]$$

Volvemos a sacar un factor común entre los términos agrupados.

$$=3[d(5d – 7c)+ 2c(5dc – 7cc)]$$

Obteniendo la siguiente respuesta.

$$=3[(5d – 7c)(d + 2c)]$$

Caso 3: Diferencia de cuadrados perfectos.

Característica y cuando aplicarlo.

- Se aplica solamente en binomios, donde el primer término es positivo y el segundo término es negativo.
- Se reconoce porque los coeficientes de los términos son números cuadrados perfectos (es decir números que tienen raíz cuadrada exacta, como 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, etc.) y los exponentes de las letras son cantidades pares (2, 4, 6, 8n, 10m, 16b, etc.).

Cómo realizar la factorización.

- Se extrae la raíz cuadrada de cada término: Al coeficiente se le extrae la raíz cuadrada normalmente (por ejemplo: √81 = 9) y a las letras, su exponente se divide entre 2 (por ejemplo: √x^6 = x^3; √m^8 = m^4; √p^2 = p). Esto último se fundamenta en la propiedad de la radicación: $\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$
- Se abren dos grupos de paréntesis (conectados entre sí por multiplicación).
- Las raíces cuadradas que se obtuvieron de cada término se anotan dentro de cada paréntesis: en el primero van sumando y en el segundo van restando (es decir, se obtiene el producto notable llamado SUMA POR DIFERENCIA).

Ejemplo:

$$81 – x^2 = (9 + x)(9 – x)$$

$$y^4 – 64 = (y^2 + 8)(y^2 – 8)$$

$$16a^4 – c^6 = (4a^2 + c^3)(4a^2 – c^3)$$

$$49x^4 - \frac{16}{25} = \left(7x^2 + \frac{4}{5}\right)\left(7x^2 - \frac{4}{5}\right)$$

Caso 4: Trinomio cuadrado perfecto. (TCP)

Característica y cuando aplicarlo.

- El trinomio debe estar organizado en forma ascendente o descendente (cualquiera de las dos).
- Tanto el primero como el tercer término deben ser positivos. Asimismo, esos dos términos deben ser cuadrados perfectos (es decir, deben tener raíz cuadrada exacta). En otras palabras, el primero y el tercer término deben reunir las características de los términos que conforman una Diferencia de Cuadrados Perfectos (Caso 3).

Cómo realizar la factorización.

- Primero debemos verificar que se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). Para ello extraemos la raíz cuadrada tanto del primer como del tercer término.
- Realizamos el doble producto de las raíces obtenidas y comparamos con el segundo término (sin fijarnos en el signo

de éste). Si efectivamente nos da, entonces tenemos un TCP.

- La factorización de un TCP es un binomio al cuadrado, que se construye anotando las raíces cuadradas del primer y tercer término, y entre ellas el signo del segundo término.

Ejemplo:

Caso 5: Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Característica y cuando aplicarlo.

- El trinomio debe estar organizado en forma descendente.
- El coeficiente del primer término debe ser uno (1).
- El grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

Cómo realizar la factorización.

- Se abren dos grupos de paréntesis.
- Se le extrae la raíz cuadrada al primer término y se anota al comienzo de cada paréntesis.
- Se definen los signos: el signo del primer paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del primer y segundo término; el signo del segundo paréntesis se obtiene al multiplicar los signos del segundo y tercer término.
- Buscamos dos cantidades que multiplicadas den como resultado el término independiente (es decir c), y que sumadas den como resultado el coeficiente del segundo término (es decir b).
- Se anotan las cantidades que satisfacen las condiciones anteriores en los espacios en blanco de cada paréntesis, en sus lugares respectivos.

Ejemplo:

$m^2 - 13m + 30 =$	$(m - 10)(m - 3)$
$y^2 + 9y + 20 =$	$(y + 5)(y + 4)$
$x^2 - 2x - 15 =$	$(x - 5)(x + 3)$

Caso 6: Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Característica y cuando aplicarlo.

- El trinomio debe estar organizado en forma descendente.
- El coeficiente principal (es decir, del primer término) debe ser positivo y diferente de uno ($a \neq 1$).
- El grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

Cómo realizar la factorización.

- Debemos multiplicar y dividir el trinomio por el coeficiente principal, es decir, a.
- En el numerador efectuamos la propiedad distributiva teniendo presente que en el segundo término el producto no se realiza, sino que se deja expresado: la cantidad que entra y la variable quedan agrupadas dentro de un paréntesis y el coeficiente original queda por fuera.
- Se expresa el primer término como el cuadrado de lo que quedó en paréntesis en el segundo término.
- Aplicamos caso 5 (Trinomio de la forma x^2+bx +c) en el numerador.
- Aplicamos caso 1 (Factor común) en los paréntesis formados.
- Finalmente, simplificamos la fracción (para eliminar el denominador).

Ejemplos Resueltos:

Factorizar	$3m^2 + 8m + 5$	
1er paso	$3(3m^2 + 8m + 5)$	$=(3m)^2 + 8(3m) + 15$
2° paso	$(3m \quad)(3m \quad)$	
3er paso	$\frac{(3m \quad)(3m \quad)}{3}$	
4° paso	$\frac{(3m + \quad)(3m + \quad)}{3}$	
5° paso	$\frac{(3m + 3)(3m + 5)}{3}$	
Simplificar	$(m + 1)(3m + 5)$ Respuesta	

Caso 7: Suma y diferencia de cubos.

Característica y cuando aplicarlo.

- Se aplica solamente en binomios, donde el primer término es positivo (el segundo término puede ser positivo o negativo).
- Se reconoce porque los coeficientes de los términos son números cubos perfectos (es decir números que tienen raíz cúbica exacta, como 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, etc.) y los exponentes de las letras son múltiplos de tres (3, 6, 9, 12, 15p, 18c, etc.).

Cómo realizar la factorización.

- Se extrae la raíz cúbica de cada término: Al coeficiente se le extrae la raíz cúbica normalmente (por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$) y a las letras, su exponente se divide entre 3 (por ejemplo: $\sqrt[3]{x^6} = x^2$). Esto se justifica por la propiedad de la radicación:
- Se abren dos grupos de paréntesis (conectados entre sí por multiplicación).
- En el primer paréntesis (llamado FACTOR CORTO) se construye un binomio con las raíces cúbicas que ya se obtuvieron. En el segundo paréntesis (llamado FACTOR LARGO) se construye un trinomio con los términos que se anotaron en el factor corto, en el siguiente orden: el primero al cuadrado, luego el primero por el segundo y, por último, el segundo al cuadrado.
- Por último, definimos los signos, de la siguiente manera: Si se trata de una suma de cubos, en el factor corto va signo positivo y en el factor largo van signos intercalados iniciando con positivo. Si tenemos una diferencia de cubos, en el factor corto va signo negativo y en el factor largo van signos positivos.
- Los siguientes son los modelos que resumen lo anterior: Suma de Cubos: Diferencia de Cubos:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

- IMPORTANTE: En algunas ocasiones el factor corto puede volverse a factorizar (debe revisarse). El factor largo no es necesario inspeccionarlo ya que no permite ser factorizado.

Ejemplo:

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6$		
Raíces	$27a^3 = 3a$	$8b^6 = 2b^2$	
Productos	$(3a)^2 = 9a^2$	$(3a)(2b^2) = 6ab^2$	$(2b^2)^2 = 4b^4$
Resultado	$(3a - 2b^2)(9a^2 + 6ab^2 + 4b^4)$		

Factorizar.

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$

$27a^3 + b^6 = (3a + b^2)(9a^2 - 3ab^2 + b^4)$

$64a^3 + 729 = (4a + 9)(16a^2 - 36a + 81)$

$x^3y^6 + 216y^9 = (xy^2 + 6y^3)(x^2y^4 - 6xy^5 + 36y^6)$

$a^3b^3x^3 + 1 = (abx + 1)(a^2b^2x^2 - abx + 1)$

$8a^3 + 27b^6 = (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$

1.4. Números complejos o imaginarios

Si $x^2 = -1$ entonces $x = \pm\sqrt{-1}$. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales ya que si n en un número par $x^n \geq 0$ para todo número real. En esta lección se comenzará el estudio de números no reales que provienen de una raíz par de un número negativo.

Definición de Números Imaginarios

$$\sqrt{-1} = i$$

Normalmente simplificamos números con raices negativas para que sean un número real multiplicado por i.

Un número imaginario tiene la forma ***bi*** donde **b** es un número real.

Potencias de i

Para simplificar potencias de i solamente tenemos que recordar que:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$(-1)^n = 1 \; si \; n \; es \; par.$$

$$(-1)^n = -1 \; si \; n \; es \; impar$$

Ejemplos: Expresar los siguientes sin una potencia.

1. i^{32} $\quad i^2 \;\; ^{16}$ $\quad 1)^{16}$ $\quad 1$
2. $i^{41} = (i^2)^{20} \times i = (-1)^{20} \times i = 1 \times i = i$
3. $i^{23} = (i^2)^{11} \times i = (-1)^{11} \times i = -1 \times i = -i$

Operaciones con números complejos:

Hay dos maneras diferentes de operar con números complejos: de forma binómico y forma polar.

Forma binómica:

Esta forma de representación de los números complejos consiste fundamentalmente de una parte real y una parte imaginaria (compuesta por una i, que significa $\sqrt{-1}$, formulado por Euler).

Z=x+yi

Suma y diferencia:

Consiste en sumar por una parte las partes reales, y por otra las partes imaginarias.

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

(a + bi) − (c + di) = (a − c) + (b − d)**i**

Multiplicación y división:

La multiplicación de los números complejos consiste en aplicar la propiedad **distributiva** del producto respecto de la suma. Hay que tener también en cuenta que **i2 = −1**.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

La división de números complejos consiste en racionalizar el denominador; multiplicando numerador y denominador por el conjugado de éste.

Forma polar:

Esta forma de representación de los números complejos consiste de un módulo y un argumento.

$|z|$ es el módulo de Z.

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|},\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Multiplicación y división:

La multiplicación de dos números complejos consiste en el producto de sus módulos y de la suma de sus argumentos:

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}'_\beta = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')_{\alpha+\beta}$$

La división de números complejos consiste en la división de sus módulos y de la resta de sus argumentos.

$$\frac{\mathbf{r}_\alpha}{\mathbf{r}'_\beta} = \left(\frac{\mathbf{r}}{\cdot\mathbf{r}'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Paso de una forma a otra:

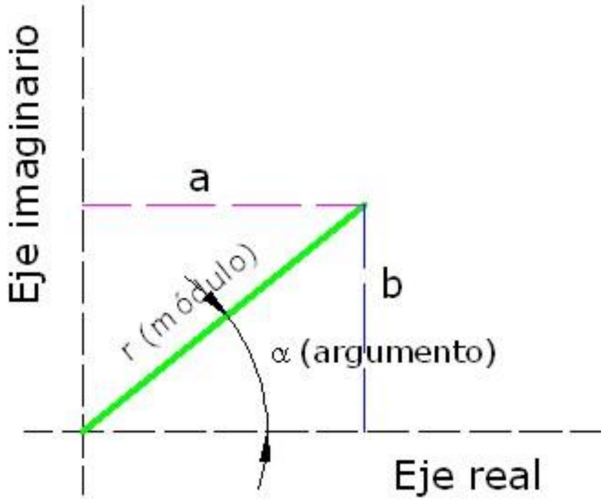
Para pasar de forma binómico a polar, debemos calcular el módulo y el argumento de las partes real e imaginaria de la forma binómica.

Primero del número ***z=a+bi*** debemos sacar su módulo (r), lo cual se hace con la siguiente fórmula:

$$r^2 = a^2 + b^2$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para finalizar, después de conseguir su módulo, debemos averiguar su argumento. Esto se hace con la siguiente fórmula:

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$



Representación gráfica de los procesos realizados.

Para pasar de forma polar, solamente necesitamos $\mathbf{r}_\alpha$ y un par de fórmulas para conseguir las partes real e imaginaria de la forma binómico.

Basta con aplicar las relaciones trigonométricas seno y coseno.

$$a = r \cdot \cos(\alpha)$$
$$b = r \cdot sen(\alpha)$$

CUESTIONARIO UNIDAD 1

Pregunta 1: ¿Qué es una variable en álgebra?

- a) Un número constante.
- b) Un símbolo que representa un número desconocido.
- c) Una operación matemática.

Pregunta 2: ¿Cuál es el resultado de 3x+5x?

- a) 8x
- b) 15x
- c) 3+5x

Pregunta 3: ¿Qué es una ecuación?

- a) Una expresión matemática que contiene una relación de igualdad.
- b) Una lista de números.
- c) Un cálculo sin variables.

Pregunta 4: Si 2x+3=11, ¿cuál es el valor de x?

- a) 2
- b) 4
- c) 5

Pregunta 5: ¿Qué es un término en una expresión algebraica?

- a) Una operación matemática.
- b) Una parte de la expresión que puede incluir un número, una variable o ambos.
- c) Una ecuación con varias variables.

Pregunta 6: ¿Cuál es la forma factorizada de x^2-9?

- a) (x−3)(x+3)
- b) (x−9)(x+1)
- c) (x+3)(x+3)

Pregunta 7: ¿Qué representa el coeficiente en un término?

- a) La parte constante de una ecuación.
- b) El número que multiplica a la variable.

- c) La variable en una expresión.

Pregunta 8: ¿Cómo se simplifica la expresión $4a+3a-5a$?

- a) 2a
- b) 3a
- c) 0

Pregunta 9: ¿Qué es un polinomio?

- a) Una ecuación con una sola variable.
- b) Una suma de términos que incluyen variables elevadas a potencias enteras no negativas.
- c) Un número entero.

Pregunta 10: ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2-4=0$?

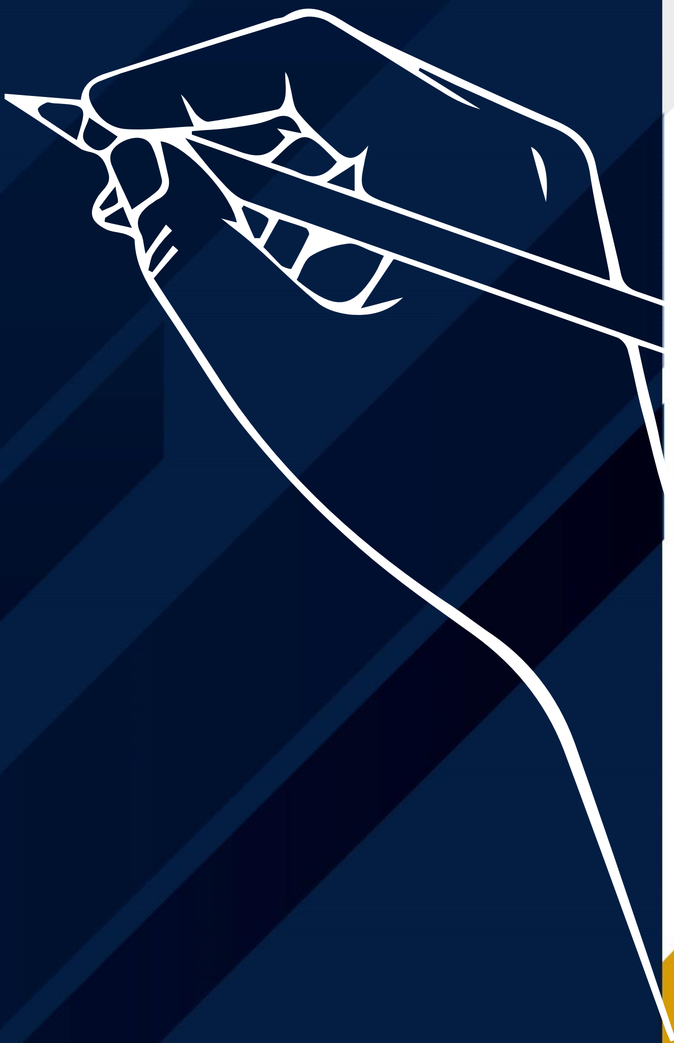
- a) $x=2$ o $x=-2$
- b) $x=0$
- c) $x=4$

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS CORRECTAS

1. b
2. a
3. a
4. b
5. b
6. a
7. b
8. a
9. b
10. a

02



ECUACIONES

UNIDAD DOS

ECUACIONES

Se profundiza en el área de ecuaciones de primer Grado enteras o Fraccionarias con una incógnita. Resolver sistema de ecuaciones lineales por métodos comunes, tales como: igualación, sustitución, reducción y determinantes. Aplicar las propiedades que relacionan el orden con la suma y el producto de números reales a la resolución de inecuaciones

2.1. Concepto de ecuación lineales y sistemas de ecuaciones

Decimos que una igualdad son dos expresiones vinculadas por el signo igual, aquí a cada expresión se la llama miembro, el primer miembro corresponde a la expresión que está a la izquierda del signo igual y el segundo miembro es la expresión que está a la derecha.

Ejemplo: Las siguientes igualdades son identidades

$$\begin{aligned} a &= a \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Resolución:

Para resolver una ecuación hay que operar miembro a miembro para despejar la o las variables. En el caso particular de tener una ecuación igualada a cero (esto implica que uno de los miembros de la igualdad es cero) a los valores de las variables que satisfacen la ecuación se los llama RAÍCES de la ecuación.

Los valores que satisfacen la ecuación se llaman raíces de la ecuación.

Pasos:

- Para reconocer que es una ecuación debe estar separada por el signo igual.
- Despejar la Variable, por lo general colocarla al lado derecho de la Ecuación.
- Pasar las constantes al lado donde que no se encuentra la variable considerando que si tiene el signo de suma debe pasar al otro lado del signo igual a restar, y si se encuentra un número que este multiplicando a la variable se debe pasar al otro lado del signo igual a dividir.

Ejemplos de Ecuaciones de Primer Grado:

1. $X + 2 = 10$

$$X = 10 - 2$$

$$X = 8$$

2. $5x = 20$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

3. $3x = 21$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

4. $5X + 3 = 43$

$$5X = 43 - 3$$

$$5X = 40$$

$$X = \frac{40}{5}$$

$$X = 8$$

5. $7X - 5 = 4X + 7$

$$7X - 4X = 7 + 5$$

$$3X = 12$$

$$X = 4$$

6. $12x - 20 - 5x = 3x + 32 - x$

$$12x - 5x - 3x + x = 32 + 20$$

$$5x = 52$$

$$X = \frac{52}{5}$$

7. $2x - (5x + 3) = 7 + (3x - 2)$

$$2x - 5x - 3 = 7 + 3x - 2$$

$$2x - 5x - 3 - 7 - 3x + 2 = 0$$

$$-6x - 8 = 0$$

$$X = \frac{8}{-6}$$

$$X = \frac{4}{-3}$$

8. $\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\mathbf{x} - \frac{11}{4}$

Sacamos mínimo común:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\frac{3x + 5(2)}{4} = \frac{2(5x) - 11}{4}$$

$$\frac{3x + 10}{4} = \frac{10x - 11}{4}$$

$$4(3x + 10) = 4(10x - 11)$$

$$12x + 40 = 40x - 44$$

$$-28x = -84$$

$$x = \frac{-84}{-28}$$

$$x = 3$$

2.2. Métodos de resolución de ecuaciones en dos variables

La solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado son los valores de las variables que satisfacen las ecuaciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones existen distintos métodos:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción por sumas y/o restas
- Determinantes
- Método Gráfico

Método de Sustitución:

Este método consiste en aislar una incógnita en una de las ecuaciones para sustituirla en la otra ecuación. De este modo, se obtiene una ecuación con una sola incógnita. Una vez resuelta esta ecuación, se sustituye en alguna de las ecuaciones para hallar la otra incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Despejamos la x en la primera ecuación:

$$x + y = 7$$

$$x = 7 - y$$

Ahora, sustituimos la expresión algebraica en la segunda, es decir, escribimos 7−y donde aparece x:

$$x - 2y = 1$$

$$7 - y - 2y = 1$$

Resolvemos la ecuación:

$$7 - y - 2y = 1$$
$$7 - 3y = 1$$
$$3y = 7 - 1$$
$$3y = 6$$
$$y = \frac{6}{3}$$
$$y = 2$$

Como ya conocemos y, podemos calcular x a partir de la ecuación que obtuvimos al despejar x:

$$x = 7 - y$$
$$x = 7 - 2$$
$$x = 5$$

Por tanto, la solución del sistema es x=5 ; y=2

2.3. Métodos de resolución de ecuaciones lineales de dos variables por reducción e igualación

Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para igualar las expresiones algebraicas obtenidas. Se obtiene, así, una ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + \ y = 7 \end{cases}$$

Despejamos la x en la primera ecuación:

$$3x - 2y = 0$$
$$3x = 2y$$
$$x = \frac{2y}{3}$$

Despejamos la x en la segunda ecuación:

$$2x + y = 7$$
$$2x = 7 - y$$
$$x = \frac{7 - y}{2}$$

Igualamos las dos expresiones:

$$\frac{2y}{3} = \frac{7 - y}{2}$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\frac{2y}{3} = \frac{7 - y}{2}$$
$$6 \cdot \frac{2y}{3} = 6 \cdot \frac{7 - y}{2}$$
$$4y = 3(7 - y)$$
$$4y = 21 - 3y$$
$$7y = 21$$
$$y = \frac{21}{7} = 3$$

Como conocemos y, podemos calcular x (sustituyendo):

$$x = \frac{2y}{3}$$
$$x = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Método de Reducción:

Este método consiste en sumar (o restar) las ecuaciones entre sí para eliminar una de las incógnitas. A veces, es necesario multiplicar por algún número las ecuaciones para que, al sumarlas, desaparezca una de las incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -15 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Como las dos ecuaciones tienen el monomio 2y, si las restamos, éste desaparece:

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = -15 \\ - \quad x + 2y = 9 \\ \hline 4x \qquad = -24 \end{array}$$

Nota: si hubiésemos querido eliminar la incógnita x, tendríamos que haber multiplicado la segunda ecuación por 5 antes de restar las ecuaciones.

Resolvemos la ecuación:

$$4x = -24$$

$$x = -\frac{24}{4} = -6$$

Calculamos la otra incógnita sustituyendo en alguna de las ecuaciones (la segunda, por ejemplo):

$$x + 2y = 9$$

$$-6 + 2y = 9$$

$$2y = 15$$

$$y = \frac{15}{2}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

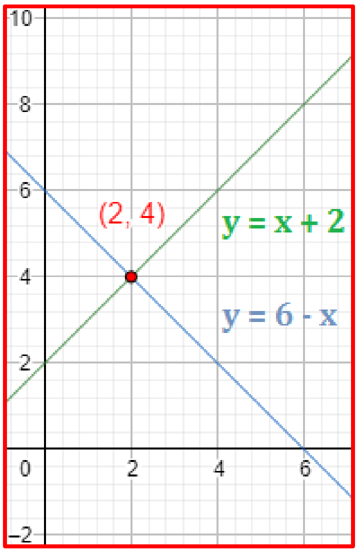
Método Gráfico:

Este método consiste en representar las dos ecuaciones y calcular el punto de corte de las mismas. Este punto es la solución del sistema porque sus coordenadas cumplen ambas ecuaciones.

Ejemplo:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

Representación de las gráficas de las dos ecuaciones:



El punto de corte entre las rectas (intersección) es (2,4).

Como la primera coordenada es la x y la segunda es la y, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

¡Si no hay punto de corte, el sistema no tiene solución!

Método de Determinantes o Regla de Cramer de 2x2

Pasos:

- Se prepara la matriz de los coeficientes y se halla el determinante.

- Se prepara la matriz de la incógnita y se halla el determinante
- Se prepara la matriz de la incógnita y se halla el determinante
- Hallamos el valor de las incógnitas
- Solución del sistema

Vamos a solucionar el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2:

Una matriz 2×2 no es más que un arreglo de elementos que posee dos columnas y dos filas.

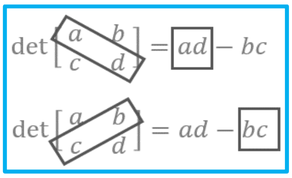
Matriz 2x2.
Dos filas y dos columnas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

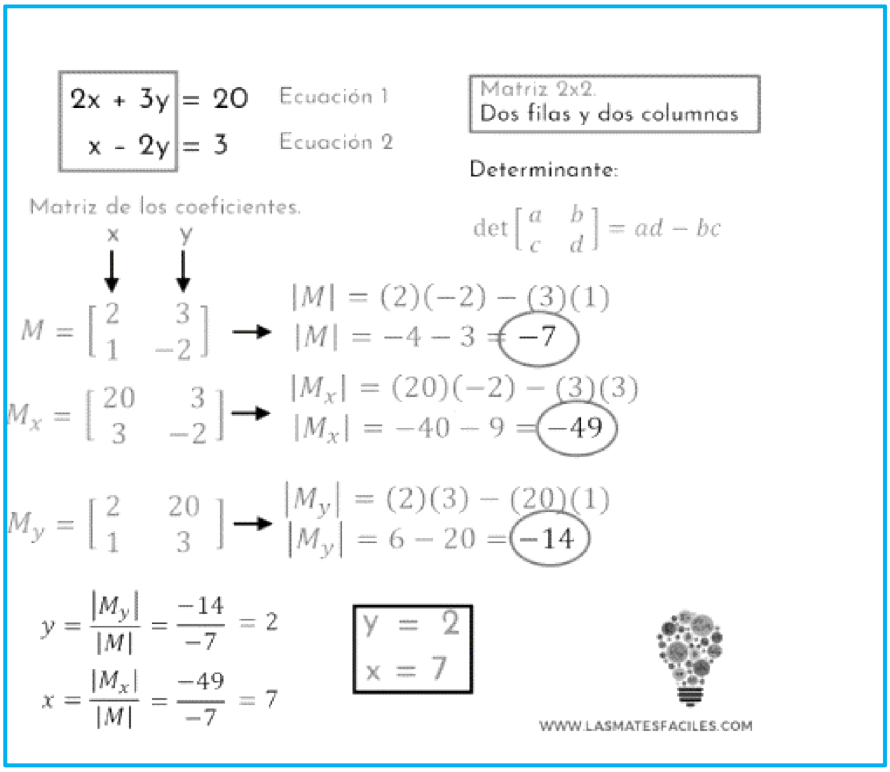
Y un determinante de una matriz 2×2 consiste en restar el producto de las diagonales de la matriz

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Vemos que si es la resta del producto de las diagonales:



Ejemplo:



2.3. Métodos de resolución de ecuaciones en n variables

Ecuación lineal con n incógnita: Es cualquier expresión del tipo: a1x1 + a2x2 + a3x3 + ... + anxn = b, donde *ai*, b pertenecen a los números reales. Los valores *ai* se denominan coeficientes, b término independiente y los valores xi incógnitas.

Al igual que el sistema con 2 ecuaciones y dos incógnitas puede que tenga una o varias soluciones o no tenga solución.

Para ello se utilizarán los siguientes métodos:

MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Este algoritmo consiste en dos procesos:

a) Eliminación hacia adelante: Esta fase reduce el conjunto de ecuaciones a un sistema triangular Superior:

Paso 1: Consiste en dividir la primera ecuación por el coeficiente de la primera incógnita aii (coeficiente pivote). A este procedimiento se le conoce como normalización.

Paso 2: Después se multiplica la ecuación normalizada por el primer coeficiente de la segunda ecuación.

Paso 3: Nótese que el primer termina de la primera ecuación es idéntico al primer término de la segunda. Por lo tanto, se puede eliminar, la primera incógnita de la segunda ecuación restando la primera a la segunda.

Paso 4: Repetir el paso 2 y 3 hasta eliminar la primera incógnita de todas las ecuaciones restantes.

Estos 4 pasos se repiten tomando como pivotes las ecuaciones restantes hasta convertir el sistema en una matriz triangular superior

b) Sustitución hacia atrás: Ya obtenido el sistema equivalente que es un sistema triangular superior este es más manejable y se puede resolver despejando primero la Xn y este valor utilizarlo para obtener despejando la segunda incógnita hasta obtener el resultado completo del sistema.

Ejemplo:

$$2X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 18$$

$$4X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 24$$

$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 4$$

Lo que buscamos son 3 números, que satisfagan a las tres ecuaciones. El método de solución será simplificar las ecuaciones, de tal modo que las soluciones se puedan identificar con facilidad. Se comienza dividiendo la primera ecuación entre 2, obteniendo:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 9$$

$$4X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 24$$

$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 4$$

Se simplificará el sistema si multiplicamos por -4 ambos lados de la primera ecuación y sumando esta a la segunda. Entonces:

$$-4X_1 - 8X_2 - 12X_3 = -36$$

$$4X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 24$$

sumándolas resulta

$$-3X_2 - 6X_3 = -12$$

La nueva ecuación se puede sustituir por cualquiera de las dos. Ahora tenemos:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 9$$

$$0X_1 - 3X_2 - 6X_3 = -12$$

$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 4$

Luego, la primera se multiplica por -3 y se le suma a la tercera, obteniendo:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 9$$

$$0X_1 - 3X_2 - 6X_3 = -12$$

$0X_1 - 5X_2 - 11X_3 = -23$

Acto seguido, la segunda ecuación se divide entre -3.

Ahora se multiplica por 5 y se le suma a la tercera:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 9$$

$$0X_1 + X_2 + 2X_3 = 4$$

$0X_1 + 0X_2 + X_3 = 3$

En este momento ya tenemos el valor de x3, ahora simplemente se procede a hacer la sustitución hacia atrás, y automáticamente se van obteniendo los valores de las otras incógnitas. Se obtendrá:

$$X_3 = 3$$

$$X_2 = 4 - 2X_3 = -2$$

$$X_1 = 9 - 2X_2 - 3X_3 = 4$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

El método de Gauss -Jordan es una variación de la eliminación gaussiana. La principal diferencia consiste en que método de Gauss-Jordan cuando se elimina una incógnita no solo se elimina de las ecuaciones siguientes si no de todas las otras ecuaciones. De esta forma el paso de eliminación genera una matriz identidad en vez de una matriz triangular.

Ejemplo:

SISTEMAS CON SOLUCION ÚNICA

1) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss -Jordan

$$2x + 3y + z = 1$$

$$3x - 2y - 4z = -3$$

$5x - y - z = 4$

Solución.

Escribimos la matriz aumentada del sistema.

$$(2\ 3 \quad 1\ 1\ 3\ -2 \quad -4 \quad -3\ 5 \quad -1 \quad -1\ 4)$$

Debemos llevar a dicha matriz a su forma escalonada reducida mediante operaciones elementales en los renglones de la matriz, para esto, escribiremos la matriz y a continuación una flecha. Encima de esta flecha indicaremos la(s) operación(es) que estamos efectuando para seguir el desarrollo.

Notación para las operaciones elementales en renglones:

icR nuevo renglón i de la matriz aumentada.

jiRR↔

intercambio del renglón i con el renglón j.

jiRaR+ nuevo renglón j de la matriz aumentada.

b) Desarrollo para obtener la forma escalonada reducida.

$$\xrightarrow[2R_3]{-\frac{2}{13}R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13}\\ 0 & -17 & -7 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{17R_2+R_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13}\\ 0 & 0 & \frac{96}{13} & \frac{192}{13}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{13}{96}R_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13}\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3+R_1]{-\frac{11}{13}R_3+R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=1\\ y=-1\\ z=2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -4 & -3\\ 5 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & -2 & -4 & -3\\ 5 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[-5R_1+R_3]{-3R_1+R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2}\\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x + 2y + 4z = 1$$

$$5x - y - 3z = -7$$

$4x + 3y + z = 2$

La matriz aumentada del sistema es:

$(3\ 2 \quad 1\ 1\ 5\ -1 \quad -3$
$-7\ 4\ 3 \quad 1\ 2\ )$

El primer elemento del primer renglón queremos que sea uno, una manera de obtenerlo es dividiendo entre 3, sin embargo, no es el único camino (ni el mejor) para obtenerlo, en este caso obtendremos −1, primero y después haremos cero los demás elementos de la primera columna, posteriormente obtendremos 1.

b) Desarrollo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & -7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & -7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4R_1+R_3]{5R_1+R_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \\ 0 & -1 & 13 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}R_2]{-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 13 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{11}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_3+R_1]{2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Para realizar en clase:

3x	+2y	+ z	=	1	
5x	+3y	+4z	=	2	Solución: X=-4, Y= 6, z= 1
x	+ y	- z	=	1	

CUESTIONARIO UNIDAD 2

Pregunta 1: ¿Cuál es la forma general de una ecuación lineal en dos variables?

- a) $ax^2+by=c$
- b) $y=mx+b$
- c) $ax+by+c=0$

Pregunta 2: ¿Qué representa la pendiente m en la ecuación y=mx+b?

- a) La intersección con el eje y.
- b) El cambio en y por cada unidad de cambio en x.
- c) El valor de x cuando y=0y = 0y=0.

Pregunta 3: ¿Cuál es la solución de la ecuación 2x+3=11?

- a) x=4
- b) x=3
- c) x=5

Pregunta 4: Si una línea tiene la ecuación y=2x+1, ¿cuál es su intersección con el eje y?

- a) 1
- b) 2
- c) 0

Pregunta 5: ¿Cómo se puede representar gráficamente una ecuación lineal?

- a) Como una curva.
- b) Como una línea recta.
- c) Como un punto.

Pregunta 6: ¿Cuál es la pendiente de la línea que pasa por los puntos (1,2)y (3,6)?

- a) 2
- b) 3
- c) 4

Pregunta 7: ¿Qué significa que dos líneas son perpendiculares?

- a) Tienen la misma pendiente.
- b) Sus pendientes son recíprocos negativos.
- c) Son paralelas.

Pregunta 8: ¿Qué forma tiene la ecuación 3x−2y=6 en términos de y?

- a) y= (3/2)x+3
- b) y= (3/2)x-3
- c) y= (2/3)x+2

Pregunta 9: ¿Cuál es la representación gráfica de la ecuación x=5?

- a) Una línea horizontal.
- b) Una línea vertical.
- c) Un punto.

Pregunta 10: Si una línea tiene una pendiente de 0, ¿qué tipo de línea es?

- a) Una línea vertical.
- b) Una línea horizontal.
- c) No es una línea.

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS CORRECTAS

1. c
2. b
3. a
4. a
5. b
6. a
7. b
8. a
9. b
10. b

03

FUNCIONES

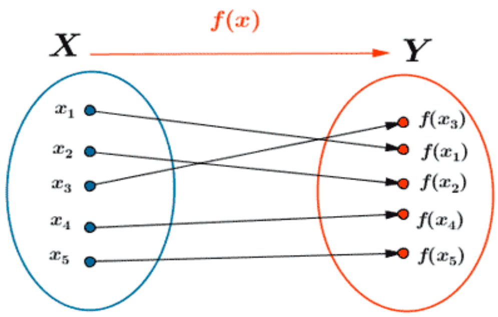
UNIDAD TRES

FUNCIONES

Se aborda el apropiadamente las funciones para ser aplicadas en ejercicios relacionados con la electrónica. Comprender los diferentes tipos de funciones para graficarlas correctamente. Identificar las leyes de los límites para aplicarlas en la resolución de ejercicios. Calcular los límites de funciones y aplicarlos en la solución de ejercicios. Resolver ejercicios que implique la resolución de límites trigonométricos.

3.1. Definición de función

Una función matemática es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno como se puede observar en la Fig. 1. Al conjunto inicial o conjunto de partida también se lo llama dominio; al conjunto final o conjunto de llegada, en tanto, se lo puede denominar codominio.



Familias de funciones:

Lineales: $f(x) = ax + b$

Cuadráticas: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Funciones raíz: $f(x) = \sqrt{kx}$

Funciones de proporcionalidad inversa: $f(x) = k/x$

Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$

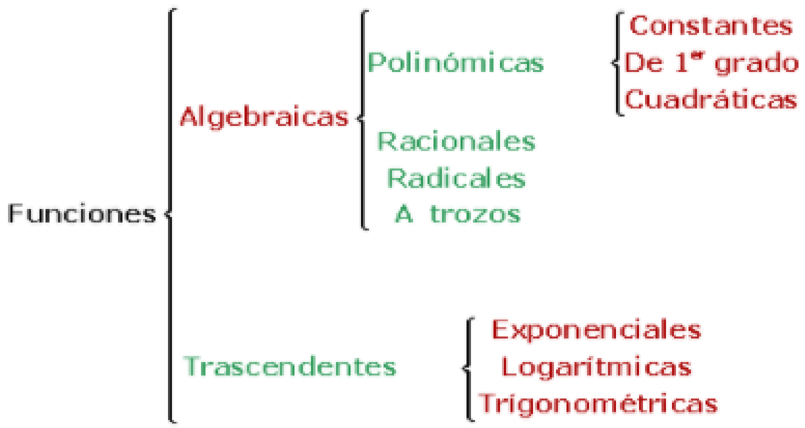
Funciones logarítmicas: $f(x) = log\ (x)$

Funciones trigonométricas: $f(x) = sin\ (x)$, $f(x) = cos\ (x)$, $f(x) = tan\ (x)$

Funciones arco: $f(x) = asin\ (x)$, $f(x) = acos\ (x)$, $f(x) = atan\ (x)$

Las funciones definidas a trozos, requieren de varias fórmulas, cada una de las cuales rige el comportamiento de la función en un cierto tramo.

Tipos de funciones



Funciones algebraicas

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Clasificación:

- **Funciones explícitas:** Si se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución

$$f(x) = 5x - 2$$

- **Funciones implícitas:** Si no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es necesario efectuar operaciones.

$$5x - y - 2 = 0$$

- **Funciones polinómicas:** Son las funciones que vienen definidas por un polinomio. Su dominio es $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número real tiene imagen.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x + ... + a_nx^n$$

3.2. Tipos de funciones

<table>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN AFÍN</th></tr>
<tr>
<td>
Es del tipo

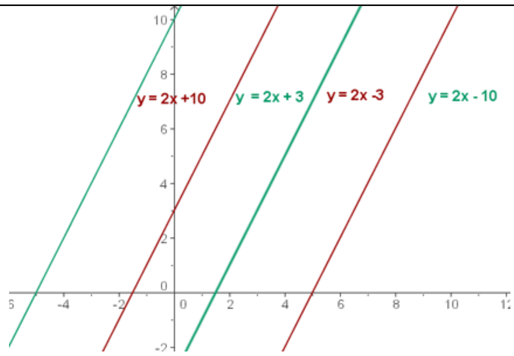
$$y = mx + n$$

Donde:

- m es la pendiente de la recta.

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Si m> 0 la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo
</td>
<td>


Ejemplo:

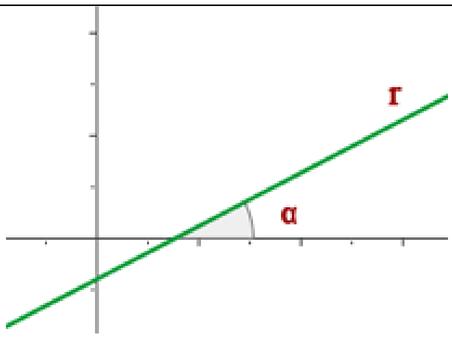
Representar gráficamente

$$y = 2x - 1$$

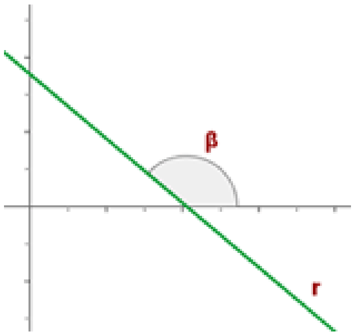
Le damos valores a la función

$$y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$
</td>
</tr>
</table>



Si m< 0 la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.

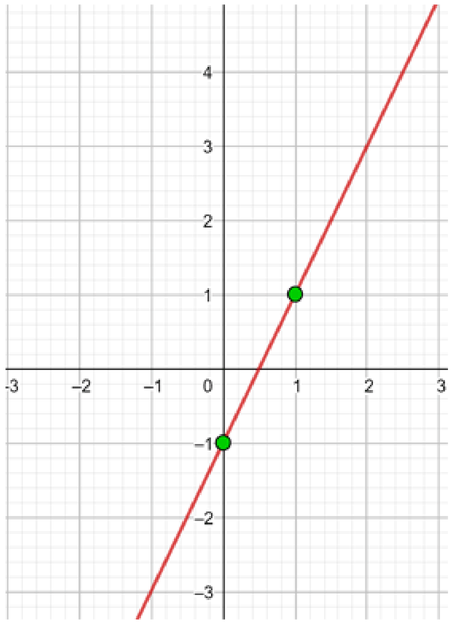


n es la ordenada al origen de la recta y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

Su gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas.

Obtenemos la siguiente tabla de valores

x	$y = 2x - 1$
0	-1
1	1



El punto (0, -1) es la ordenada en el origen.

FUNCIÓN LINEAL

La función lineal es del tipo:

y=mx

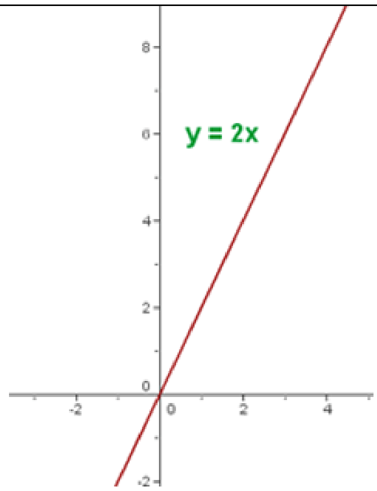
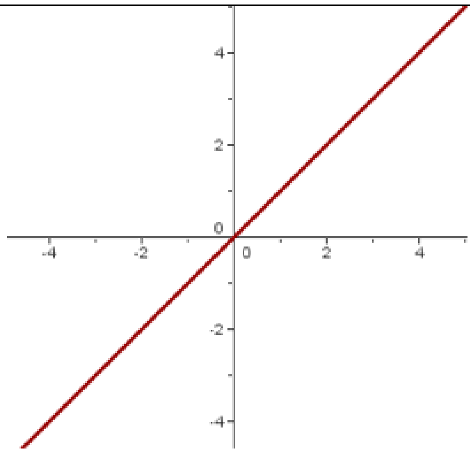
Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplo:

$y = 2x$

Para representar la función le damos al menos dos valores

x	0	1	2	3	4
$y = 2x$	0	2	4	6	8

	
FUNCIÓN IDENTIDAD	
Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante. $$f(x) = x$$	

- **Función constante:** El criterio viene dado por un número real. La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.
  f(x) = k
- **Funciones polinómicas de primer grado:** Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función.
  f(x) = mx + n

Función cuadrática

Las funciones polinómicas son aquellas constituidas por un polinomio, un ejemplo de estas es la función cuadrática o de segundo grado, representada con una gráfica de parábola y la siguiente ecuación:

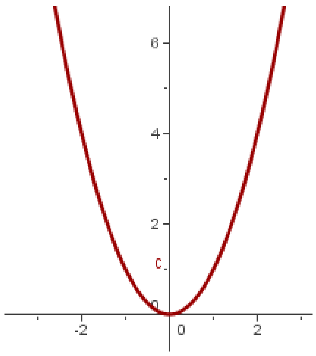
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Gráfica de la función cuadrática

Partimos de

$$y = x^2$$

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



- **Funciones racionales:** El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador. El criterio viene dado por un cociente entre polinomios:

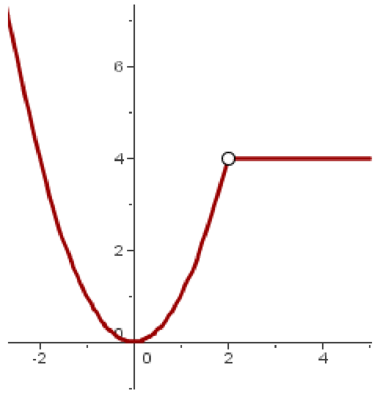
$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

- **Funciones radicales:** El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical. El dominio de una función irracional de índice impar es $\mathbb{R}$. El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

- **Funciones algebraicas a trozos:** Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

El dominio lo forman todos los números reales menos el 2.



Las funciones trascendentes

La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

- **Funciones exponenciales:** Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x.

$$f(x) = a^x$$

- **Funciones logarítmicas:** La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$$f(x) = log_a x$$

$$a > 0, a \neq 1$$

Funciones trigonométricas: Dentro de ello se encuentran las siguientes.

Función seno

$$f(x) = sen\ x$$

Función coseno

$$f(x) = cos\ x$$

Función tangente

$$f(x) = tg\ x$$

Función cosecante

$$f(x) = cosec\ x$$

Función secante

$$f(x) = sec\ x$$

Función cotangente

$$f(x) = cotg\ x$$

3.3. Continuidad de funciones

En el caso de aplicaciones de $\mathbb{R}$en $\mathbb{R}$, y de una manera más rigurosa se dice que una función *f* es continua en un punto x_1 si existe $f(x_1)$, si existe el límite de f(x) cuando x tiende hacia x_1 por la derecha, si existe el límite de f(x) cuando x tiende hacia x_1 por la izquierda, y además ambos coinciden con $f(x_1)$.

Continuidad Lateral:

Una función *f* es **continua por la izquierda** en el punto $x = x_1$ si el límite lateral por la izquierda y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = f(x_1)$$

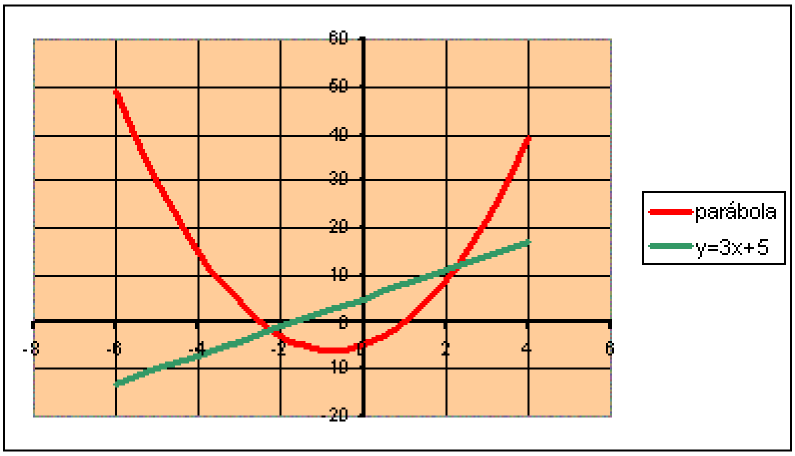
Una función *f* es **continua por la derecha** en el punto $x = x_1$ si su límite lateral por la derecha y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1)$$

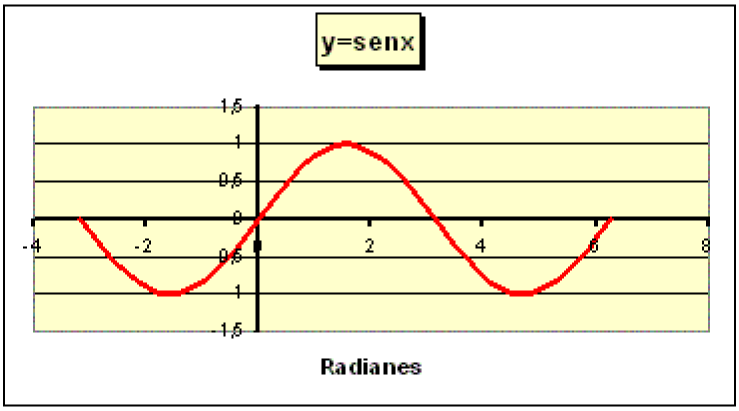
Una función *f* es continua en un punto si es continua por la izquierda y es continua por la derecha. Esto es:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = \lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1)$$

Ejemplos de gráfica de funciones continuas:



Gráfica de la función f (x) = sen x:



Continuidad de una función en un intervalo (a;b)

Una función, *f* es continua en un intervalo *I*, si y solo si la función es continua en todos los puntos del intervalo. Dado que una función *f* es continua en un intervalo abierto **(a, b)** si la función es continua en todos los puntos del intervalo, entonces *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b] si y solo si es continua en el intervalo (a, b) y además es continua en el punto **a** por la derecha y en el punto **b** por la izquierda.

3.4. Gráfica de funciones

La representación de funciones es el mecanismo mediante el cual se representa gráficamente una función. Observando la gráfica se puede obtener mucha información acerca de cómo se comporta dicha función.

Las coordenadas de un punto P = (x,y) vienen determinadas por un par ordenado de números x e y, llamados coordenadas cartesianas.

El concepto de gráfica de una función se generaliza a la gráfica de una relación. Notar que, si bien cada función tiene una única representación gráfica, pueden existir varias funciones que tengan la misma, pero con dominios y codominios diferentes.

En la práctica no es posible representar todos los pares (x,f(x)), puesto que en general son infinitos. Para ellos se acostumbran a representar en los ejes de coordenadas unos cuantos puntos significativos y trazar el resto de la gráfica según las propiedades de la función.

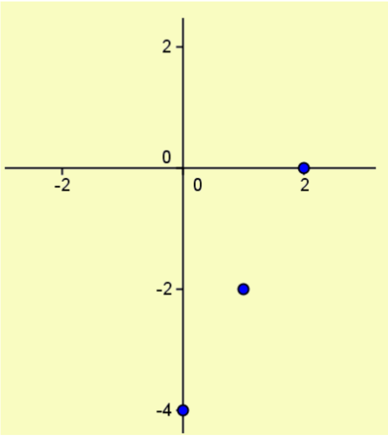
GRÁFICA DE FUNCIONES LINEALES

Representad gráficamente la función F(X)=2X-4

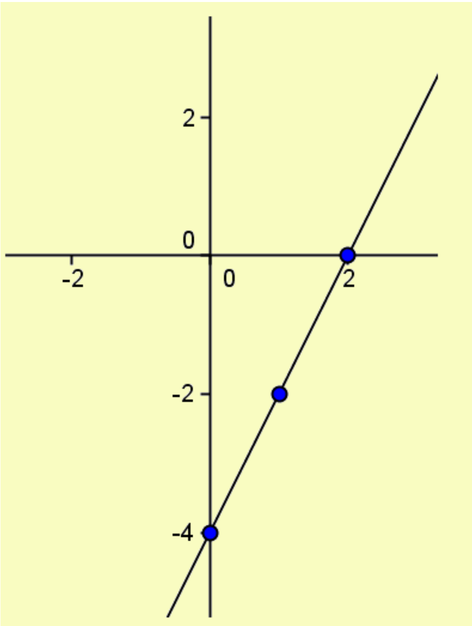
Empezamos construyendo una tabla de valores con pares.

x	$f(x)$
-2	$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$
-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$
0	$f(0) = 2 \cdot (0) - 4 = -4$
1	$f(1) = 2 \cdot (1) - 4 = -2$
2	$f(2) = 2 \cdot (2) - 4 = 0$

Si representamos los puntos obtenidos:

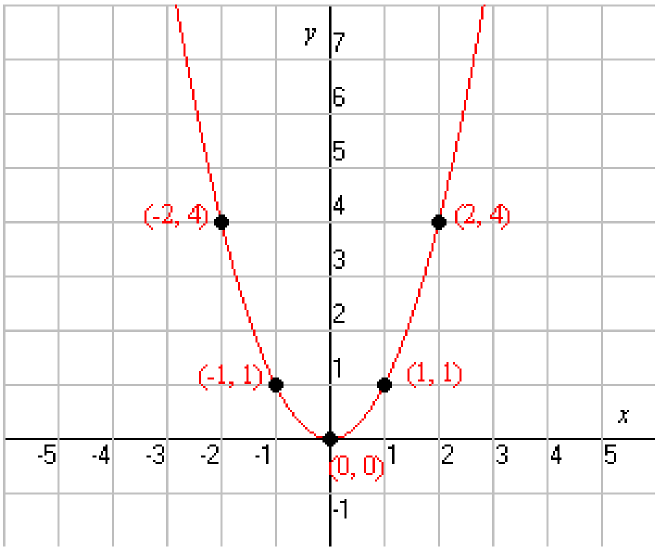


Y si por último los unimos, obtenemos la gráfica de la recta considerada:



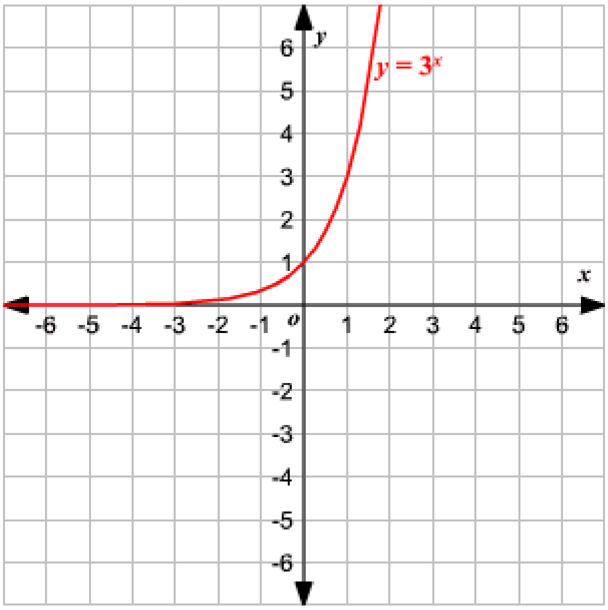
La forma general de una función cuadrática es f (x) = ax^2+ bx + c . La gráfica de una función cuadrática es una parábola, un tipo de curva de 2 dimensiones.

La parábola básica, y = x 2 , tiene una gráfica como la mostrada en la figura.



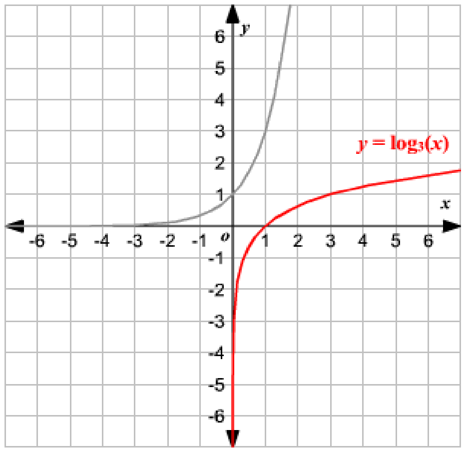
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL

La función $y = \log_b x$ es la función inversa de la función exponencial. Considere la función $y = 3^x$ .Puede graficarse como:



La gráfica de la función inversa de cualquier función es la reflexión de la gráfica de la función sobre la recta $y = x$. Así, la gráfica de la función logarítmica $y = \log_3(x)$ que es la inversa de la función $y = 3^x$ es la reflexión de la gráfica anterior sobre la recta $y = x$.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
$y=\log_3 x$	-2	-1	0	1	2	3	4

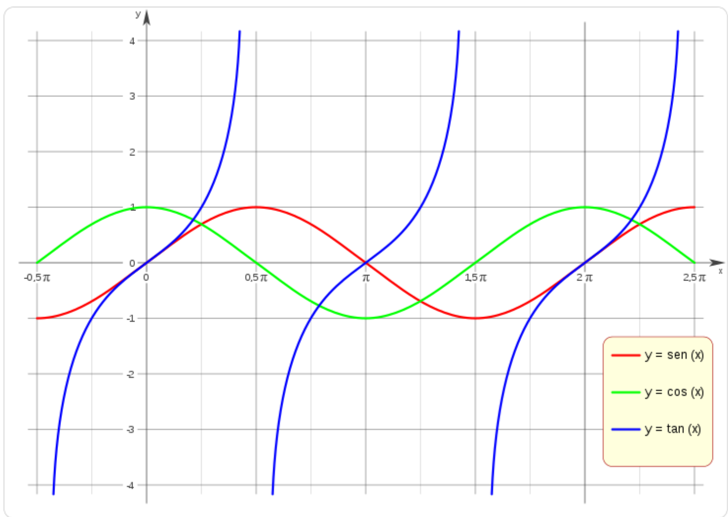


GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas f son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica.

Las razones trigonométricas de un ángulo a son las obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, las comparaciones por su cociente de sus tres lados a, b y c.

Existen seis funciones trigonométricas:



SENO

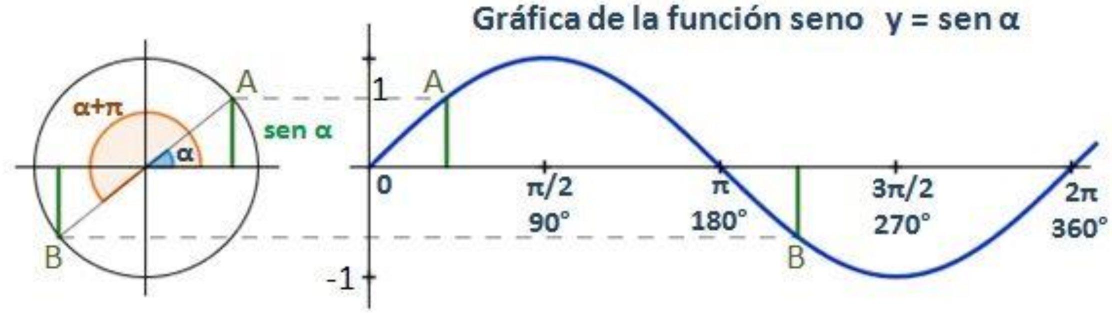
El seno de un ángulo a se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

Fórmula del seno

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

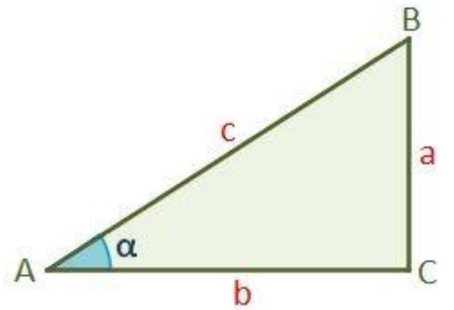
Su abreviatura son sen o sin (del latín sinus).

La gráfica de la función seno es:



La función del seno es periódica de período 360° (2π radianes), por lo que esta sección de la gráfica se repetirá en los diferentes períodos.

COSENO

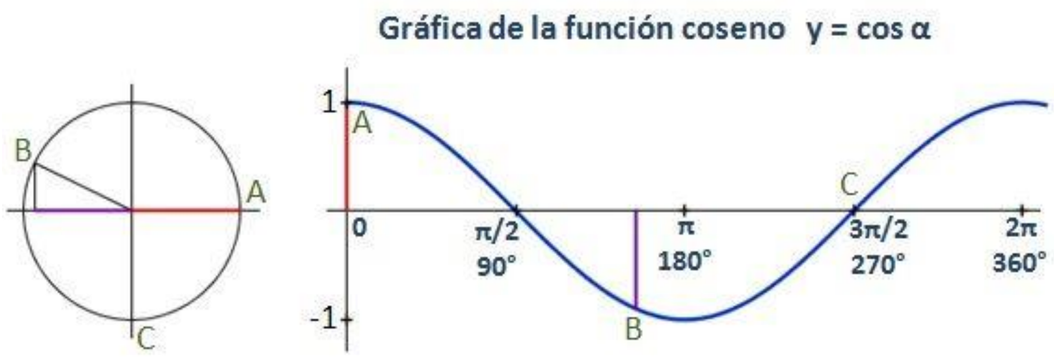


El coseno de un ángulo a se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y la hipotenusa (c).

$$\cos \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

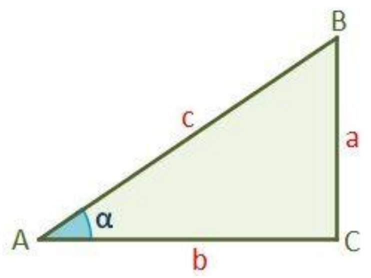
Su abreviatura es *cos* (del latín *cosinus*).

La gráfica de la función coseno es:



La función del coseno es periódica de período 360° (2π radianes).

TANGENTE

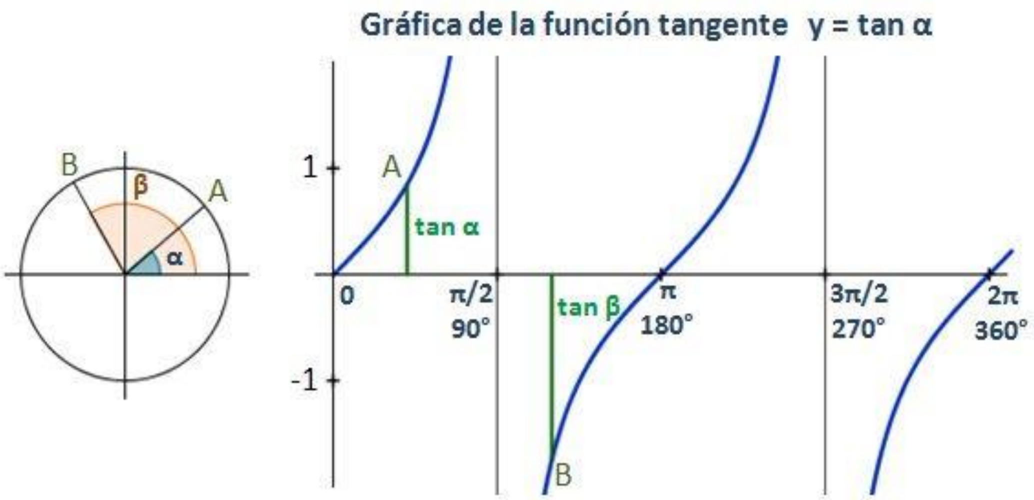


La tangente de un ángulo α es la razón entre el cateto opuesto (a) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\tan \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

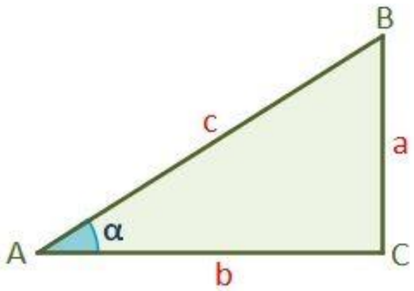
Su abreviatura puede ser: *tan* o *tg*.

La gráfica de la función tangente es:



La función de la tangente es periódica de período 180° (π radianes).

COSECANTE



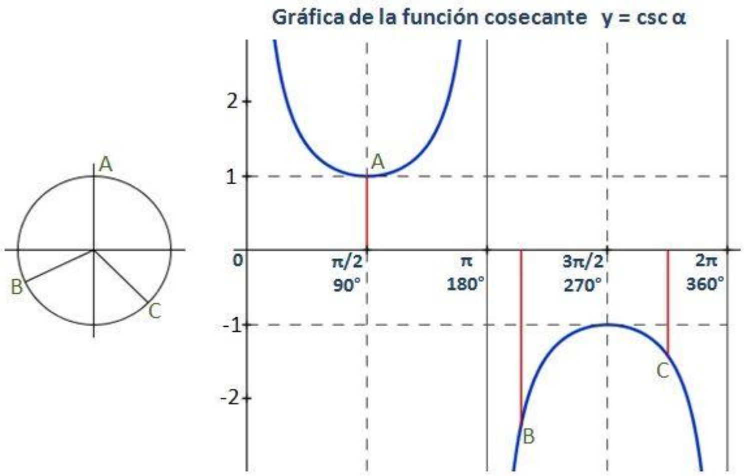
La cosecante es la razón trigonométrica recíproca del seno, es decir csc a · sen a=1.

La cosecante del ángulo a de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto opuesto (a).

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

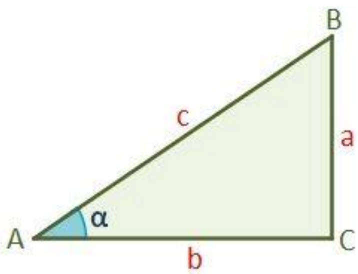
Su abreviatura es *csc* o *cosec*.

La gráfica de la función cosecante es:



La función de la cosecante es periódica de período 360° (2π radianes).

SECANTE



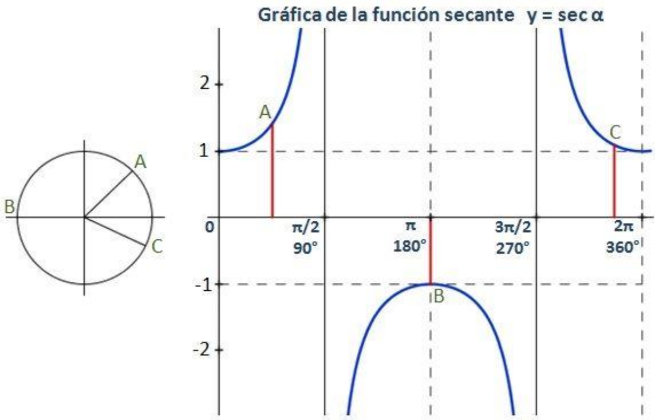
La secante es la razón trigonométrica recíproca del coseno, es decir sec a · cos a=1.

La secante de un ángulo a de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}$$

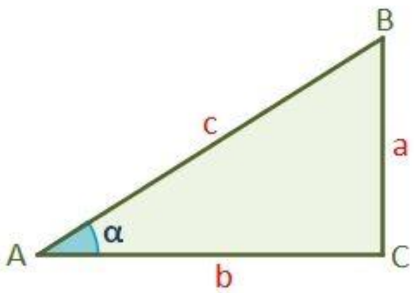
Su abreviatura es *sec*.

La gráfica de la función secante es:



La función de la secante es periódica de período 360° (2π radianes).

COTANGENTE



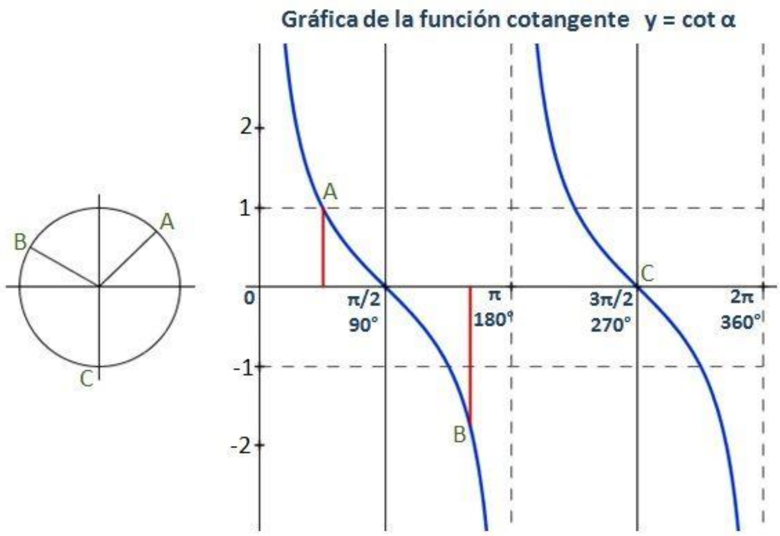
La cotangente es la razón trigonométrica recíproca de la tangente, por lo tanto tan a · cot a=1.

La cotangente de un ángulo a de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y el cateto opuesto (a).

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Su abreviatura es *cot*, *cotg* o *cotan*.

La gráfica de la función cotangente es:


Gráfica de la función cotangente y = cot α
A
B
C
2
1
0
-1
-2
π/2
90°
π
180°
3π/2
270°
2π
360°

CUESTIONARIO UNIDAD 3

Pregunta 1: ¿Qué es una función?

- a) Una relación entre dos conjuntos donde cada elemento del primer conjunto tiene un único elemento correspondiente en el segundo.
- b) Una lista de números.
- c) Una operación matemática.

Pregunta 2: Si f(x)=2x+3, ¿cuál es el valor de f(2)?

- a) 5
- b) 7
- c) 8

Pregunta 3: ¿Qué representa el dominio de una función?

- a) Los valores de salida de la función.
- b) Los valores de entrada permitidos para la función.
- c) La gráfica de la función.

Pregunta 4: ¿Qué es una función inyectiva?

- a) Una función donde cada valor del codominio es alcanzado por al menos un elemento del dominio.
- b) Una función donde cada valor del dominio tiene un único valor de salida.
- c) Una función que tiene imágenes repetidas.

Pregunta 5: Si $g(x)=x^2$, ¿cuál es la imagen de g(3)?

- a) 3
- b) 6
- c) 9

Pregunta 6: ¿Qué es una función par?

- a) Una función donde f(−x)=f(x)
- b) Una función donde f(−x)=−f(x)

- c) Una función que siempre es creciente.

Pregunta 7: ¿Cuál es el rango de la función $f(x)=x^2$?

- a) $(-\infty,\infty)$
- b) $[0,\infty)$
- c) $(-\infty,0)$

Pregunta 8: Si $h(x)=3x-4$, ¿cuál es la pendiente de la función?

- a) 3
- b) -4
- c) 7

Pregunta 9: ¿Qué significa que una función es continua?

- a) La función tiene un límite en todos los puntos de su dominio.
- b) La gráfica de la función no tiene saltos ni discontinuidades.
- c) Ambas opciones son correctas.

Pregunta 10: ¿Cómo se denota una función compuesta $(f\circ g)(x)$?

- a) $f(g(x))$
- b) $f+g(x)$
- c) $f(x)+g(x)$

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS CORRECTAS

1. a
2. b
3. b
4. b
5. c
6. a
7. b
8. a
9. c
10. a

INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO PELILEO

TOMO 2:

Cálculo diferencial e integral

Ing. María Fernanda Oñate Mg.

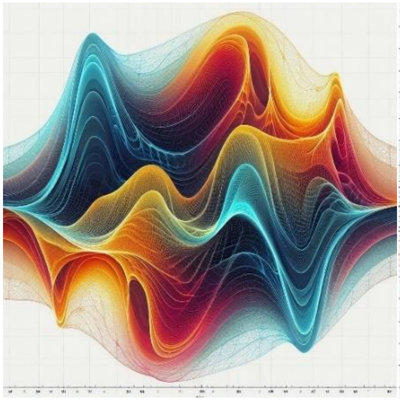
CONTENIDOS

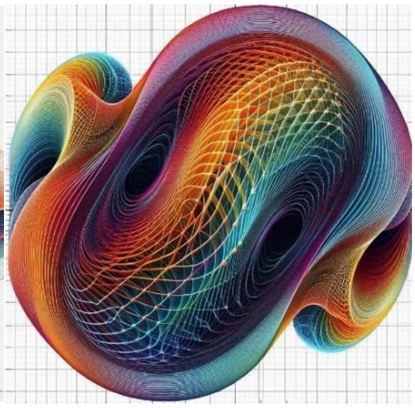
01

FUNCIONES Y NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD UNO

FUNCIONES Y NÚMEROS COMPLEJOS

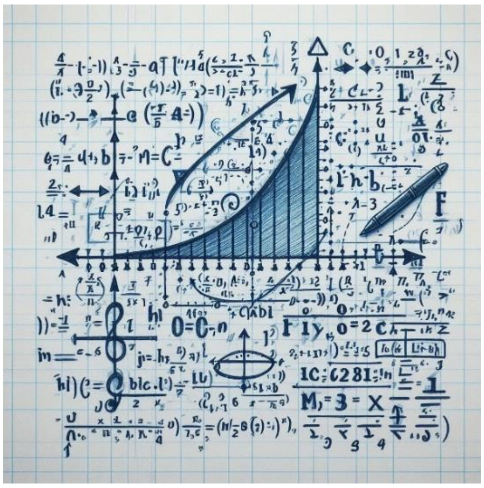




En esta guía, se analizan conceptos como el dominio y el recorrido de una función, que son esenciales para entender su comportamiento. También se estudian los diferentes tipos de funciones, como las inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, inversas y por tramos. Estos conceptos son importantes para comprender cómo se comportan las funciones en diferentes situaciones. Además, se examinan las gráficas de funciones lineales, cuadráticas, de valor absoluto y por tramos. La comprensión de las gráficas es esencial para entender el comportamiento de las funciones y para poder resolver problemas relacionados con ellas.

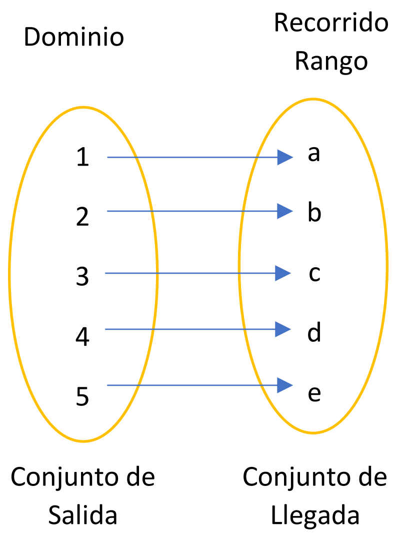
1.1. Función

Es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de la otra. Las funciones son una herramienta matemática fundamental que permite relacionar un conjunto de números con otro conjunto de números.



Notación de una función

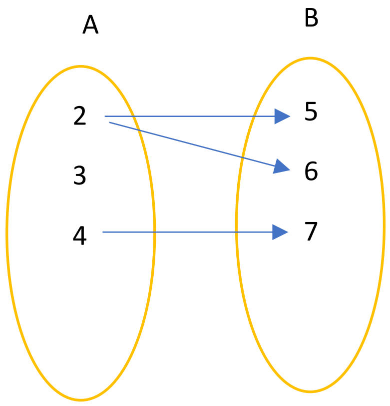
$$f(x) \rightarrow función$$
$$x \rightarrow variable\ independiente$$
$$y \rightarrow variable\ dependiente$$



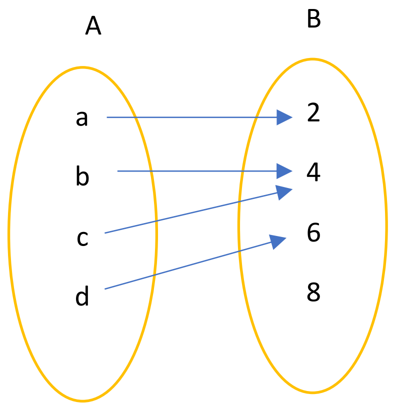
Dom f(x) = {1, 2, 3, 4, 5}

Rec f(x) = {a, b, c, d, e}

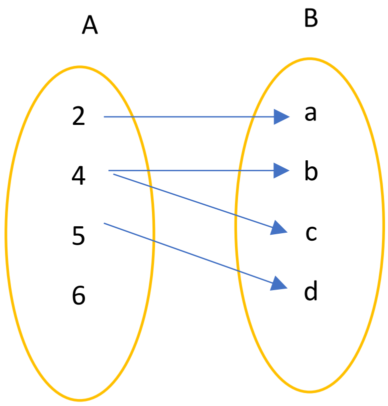
Nota: Se trata de una función cuando la regla asigna a todos y a cada uno de los elementos del conjunto de salida, uno y solo un elemento del conjunto de llegada.



(1)



(2)



(3)

Según el análisis de los siguientes diagramas se establece que el literal (1) y (3) no son funciones ya que no cumplen con la condición dada; mientras que el literal (2) si corresponde a una función ya que a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y solo un elemento del conjunto B.

1.2. Evaluación de una función

Es determinar el valor que se obtiene al sustituir la variable de la ecuación por un valor numérico o expresión algebraica. Ejemplo:

De acuerdo a como se observa en los siguientes problemas desarrollados evaluar la función en los valores dados:

Ejemplos:

- $f(x) = 4x - 2;\ x = 3$
  $f(x) = 4 * (3) - 2$
  $f(x) = 12 - 2$
  $f(x) = 10$

- $f(x) = 4x^2 - 5x;\ x = 1$
  $f(x) = 4(1)^2 - 5(1)$
  $f(x) = 4 - 5$
  $f(x) = -1$

- $f(x) = -2x^2 - 5x + 4;\ x = -3$
  $f(x) = -2(-3)^2 - 5(-3) + 4$
  $f(x) = -18 + 15 + 4$
  $f(x) = 1$

1.3. Elementos de una función

Dominio: Se consideran todos los valores o elementos del conjunto de partida que tienen una imagen en el conjunto de llegada. Se representa como *Dom f(x)*.

Se refiere al conjunto de valores para los cuales la función está definida. Es decir, son los valores que pueden ser ingresados en la función sin generar una división por cero o una raíz cuadrada negativa.

Recorrido o rango: conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada. Se representa como *Rec f(x)*.

Hace referencia al conjunto de valores que la función puede tomar como resultado. Es decir, son los valores que pueden ser obtenidos a partir de los valores del dominio mediante la aplicación de la función.

Determinación del dominio de una función

- ***Función polinómica:*** formadas por expresiones algebraicas de varios términos, el dominio de este tipo de funciones es todo el campo de los reales.
  Ejemplos:
  - $f(x) = x^2 + 2x - 5$
    $Dom\ f(x) = x \in \mathbb{R}$
  - $f(x) = 9x + 7$
    $Dom\ f(x) = x \in \mathbb{R}$

- ***Función racional:*** son funciones de la forma P(x)/Q(x); y el dominio de estas funciones serán todos los reales excepto los valores que hagan que el denominador sea 0.
  $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)};\ \ Q(x) \neq 0$$
  Ejemplos:
  - $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+7}$
    $x + 7 = 0\ \ (Igualar\ el\ den\ a\ 0, despejar)$
    $x = -7$
    $Domf(x) = \mathbb{R} - \{-7\}$
  - $f(x) = \frac{5x^3-6}{2x+3}$
    $2x + 3 = 0$
    $2x = -3$
    $x = -\frac{3}{2}$
    $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$

- ***Función raíz con índice par:*** esta función devuelve la raíz de un valor o expresión, su gráfica corresponde a la mitad de una parábola. El dominio de esta función está formado por los valores que permitan el cálculo de una raíz par, es decir debe generar un valor ≥ 0.
  Ejemplos:
  - $f(x) = \sqrt{4x - 8}$
    $4x - 8 \geq 0\ (Verificar\ la\ condición\ y\ despejar)$
    $4x \geq 8$
    $x \geq \frac{8}{2}$
    $x \geq 2$
    $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 2\}$
  - $f(x) = \sqrt{x + 12}$
    $x + 12 \geq 0$
    $x \geq -12$
    $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq -12\}$

Determinación del recorrido de una función

Para determinar el recorrido de la función se debe despejar x en función de y, y luego se analiza para que valor de y, x tomará valores reales; considerando los parámetros analizados previamente para el cálculo del dominio de funciones polinómicas, raciones y raíces pares.

Ejemplos:

- $f(x) = y = \frac{2}{x-3}$

$y * (x - 3) = 2$
$xy - 3y = 2$

$$xy = 2 + 3y$$
$$x = \frac{2 + 3y}{y}$$
$$y = 0\,(verificar\ \ denominador)$$
$$Rec\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

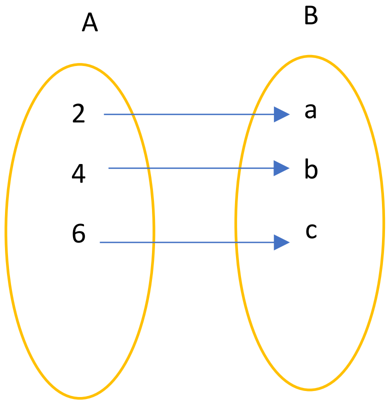
- $f(x) = y = \sqrt{x + 7}$

$$(y)^2 = \left(\sqrt{x + 7}\right)^2$$
$$y^2 = x + 7$$
$$x = y^2 - 7$$
$$Rec\ f(x) = x \in \mathbb{R}$$

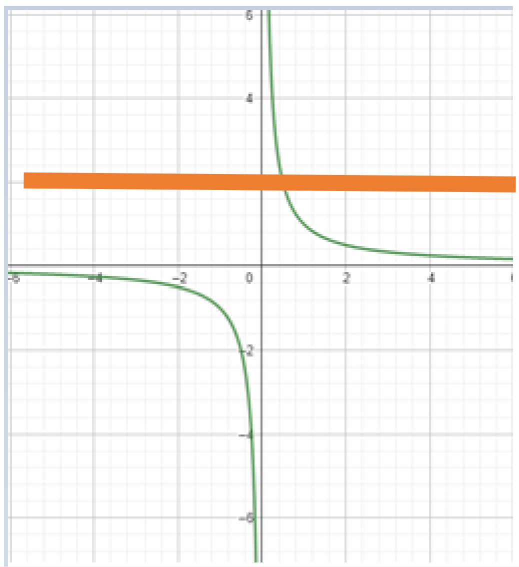
1.4. Tipos de funciones

Existen varios tipos de funciones, entre ellas las inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, inversas y por tramos.

Función inyectiva: son aquellas en las que cada valor del dominio tiene un único valor correspondiente en el recorrido. A cada elemento del conjunto A le corresponde 1 y solo 1 elemento del conjunto B. De forma gráfica se puede verificar al trazar una línea horizontal y esta con corta en un solo punto a la función cumple con ser inyectiva.

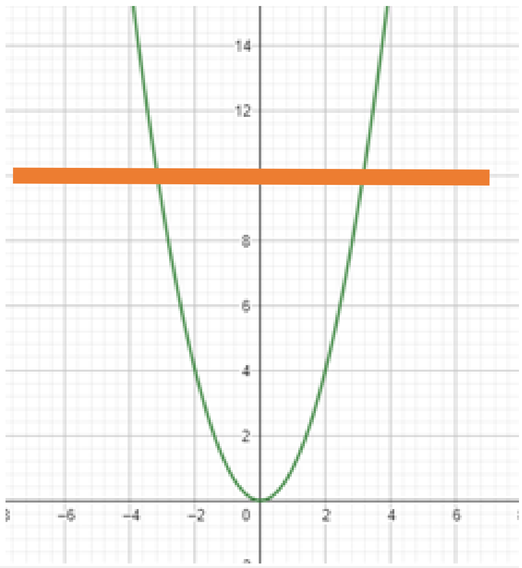


Análisis gráfico



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1 solo corte, entonces es inyectiva



$$f(x) = x^2$$

2 cortes, entonces no es inyectiva

Verificar si las siguientes funciones son inyectivas

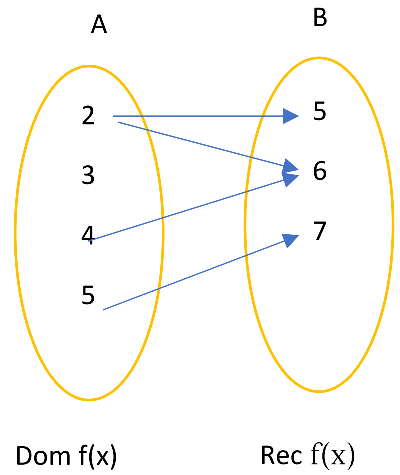
Función sobreyectiva: son aquellas en las que cada valor del recorrido tiene al menos un valor correspondiente en el dominio.

A cada elemento de B le corresponde algún elemento de A; una función es sobreyectiva cuando el codominio y el recorrido coinciden. Formalmente:

$$\forall y \in Rec\ f \exists x\ \in Dom\ f\ /\ f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento **y** el recorrido existe otro elemento **x** del dominio tal que **y** es la imagen de **x** por **f.**

Las funciones reales son sobreyectivas cuando Rec f(x)= ℝ, ya que por definición en ellas Rec f(x)= ℝ

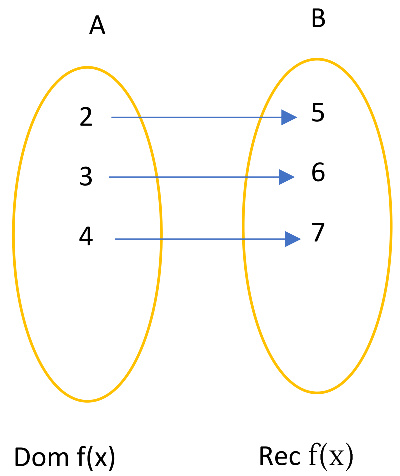


Función biyectiva: son aquellas que son tanto inyectivas como sobreyectivas, es decir cumplen con las condiciones de los dos tipos de funciones.

A relación perfecta con B, una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, formalmente:

$$\forall y \in Rec\ f\ \exists!\, x\ \in Dom\ f\ /\ f(x) = y$$

Es decir, para cualquier elemento **y** del recorrido existe un único elemento **x** del dominio tal que **y** es la imaginen de **x** por **f(x)**.



Ejemplos:

$f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

$f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

$f(x) = \ln(x)$

Ejercicios Resueltos

Verificar si las siguientes funciones son funciones inyectivas de forma analítica:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = x + 5} \\ \boldsymbol{f(2) = 2 + 5} \\ \boldsymbol{f(2) = 7} \\ \\ \boldsymbol{f(-2) = -2 + 5} \\ \boldsymbol{f(-2) = 3} \\ \boldsymbol{f(x) = f(-x)} \\ \boldsymbol{7 \neq 3} \\ \boldsymbol{Es\ inyectiva} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = x^2} \\ \boldsymbol{f(4) = (4)^2} \\ \boldsymbol{f(4) = 16} \\ \\ \boldsymbol{f(-4) = (-4)^2} \\ \boldsymbol{f(-4) = 16} \\ \boldsymbol{f(x) = f(-x)} \\ \boldsymbol{16 = 16} \\ \boldsymbol{No\ es\ inyectiva} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = x^2 + 6x} \\ \boldsymbol{f(7) = (7)^2 + 6(7)} \\ \boldsymbol{f(7) = 91} \\ \\ \boldsymbol{f(-7) = (-7)^2 + 6(-7)} \\ \boldsymbol{f(-7) = 49 - 42} \\ \boldsymbol{f(-7) = 7} \\ \boldsymbol{91 \neq 7} \\ \boldsymbol{Es\ inyectiva} \end{gathered}$$

Verificar si las siguientes funciones son funciones sobreyectivas:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = x + 5} \\ \boldsymbol{y = x + 5} \\ \boldsymbol{y - 5 = x} \\ \boldsymbol{Rec\ f(x) = y \in \mathbb{R}} \\ \boldsymbol{Es\ sobreyectiva} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = x^2} \\ \boldsymbol{y = x^2} \\ \boldsymbol{\sqrt{y} = \sqrt{x^2}} \\ \boldsymbol{\sqrt{y} = x} \\ \boldsymbol{Rec\ f(x) = \{y \in f(x) / y \geq 0\}} \end{gathered}$$

Verificar si las siguientes funciones son funciones biyectivas:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 7} \\ \boldsymbol{f(x) = 2(-6)^3 - 7} \\ \boldsymbol{f(x) = -432 - 7} \\ \boldsymbol{f(x) = -439} \\ \\ \boldsymbol{f(x) = 2(6)^3 - 7} \\ \boldsymbol{f(x) = 432 - 7} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f(x) = 5x^2 + 8} \\ \boldsymbol{f(x) = 5(-9)^2 + 8} \\ \boldsymbol{f(x) = 405 + 8} \\ \boldsymbol{f(x) = 413} \\ \\ \boldsymbol{f(x) = 5(9)^2 + 8} \\ \boldsymbol{f(x) = 405 + 8} \end{gathered}$$

$\boldsymbol{f(x) = 425}$	$\boldsymbol{f(x) = 413}$
$\boldsymbol{-439 \neq 425}$	$\boldsymbol{413 = 413}$
Es inyectiva	**No es inyectiva**

$$\boldsymbol{y = 2x^3 - 7}$$
$$\boldsymbol{y + 7 = 2x^3}$$
$$\boldsymbol{\frac{y+7}{2} = x^3}$$
$$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{y+7}{2}} = \sqrt[3]{x^3}}$$
$$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{y+7}{2}} = x}$$
$$\boldsymbol{Recf(x) = \{y \in \mathbb{R}\}}$$
$$\boldsymbol{Es\ sobreyectiva}$$
$$\boldsymbol{ES\ BIYECTIVA}$$

$$y = 5x^2 + 8$$
$$y - 8 = 5x^2$$
$$\frac{y-8}{5} = x^2$$
$$\sqrt{\frac{y-8}{5}} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{\frac{y-8}{5}} = x$$
$$\frac{y-8}{5} \geq 0$$
$$y \geq 8$$
$$Recf(x) = y \in \mathbb{R} - \{y \geq 8\}$$
$$No\ es\ sobreyectiva$$
$$NO\ ES\ BIYECTIVA$$

Función inversa: son aquellas que pueden ser invertidas, es decir, si se intercambian los valores del dominio y el recorrido, la función sigue siendo válida.

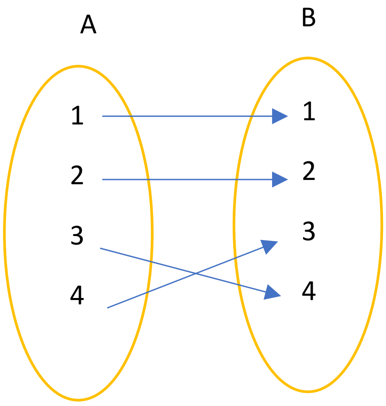
Una función **inversa** es una función que es completamente opuesta a la función original. La función inversa también se conoce como función recíproca.

Una función inversa cumple con las siguientes condiciones:

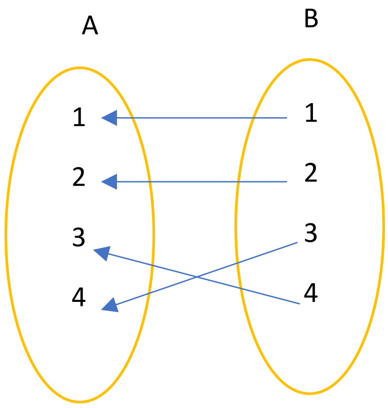
- El dominio es igual al recorrido de la función original.
- El recorrido es igual al dominio de la misma función.
- La función inversa es la reflexión de la función original en la recta.

La función **inversa** se denota por g = f−1, y tanto f como f−1 se dicen invertibles.

En general, una función es invertible solo cuando cada valor de entrada tiene un valor de salida único.



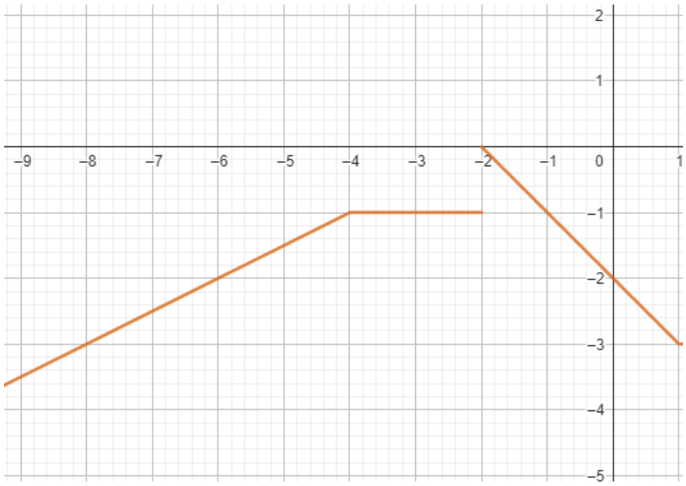
FUNCIÓN



FUNCIÓN INVERSA

Función por tramos: son aquellas que están definidas por diferentes fórmulas en diferentes intervalos del dominio. Una función por tramos es una función f en la que su dominio se puede dividir en diferentes partes. En cada una de esas partes, la función está definida con una fórmula o expresión diferente. Está función definida por partes es aquella que no está definida por una sola ecuación, sino por dos o más. Cada ecuación es válida para algún intervalo. Es continua en un intervalo dado si está definida por el intervalo, las expresiones matemáticas apropiadas que constituyen a la función son continuas en ese intervalo, y no hay discontinuidad en ningún punto extremo de los subdominios en ese intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1; x \leq -4 \\ -1;\ -4 \leq x \leq -2 \\ -x - 2; -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



1.5. Gráfica de funciones

La gráfica de una función es una representación visual de la relación entre los valores del dominio y del recorrido.

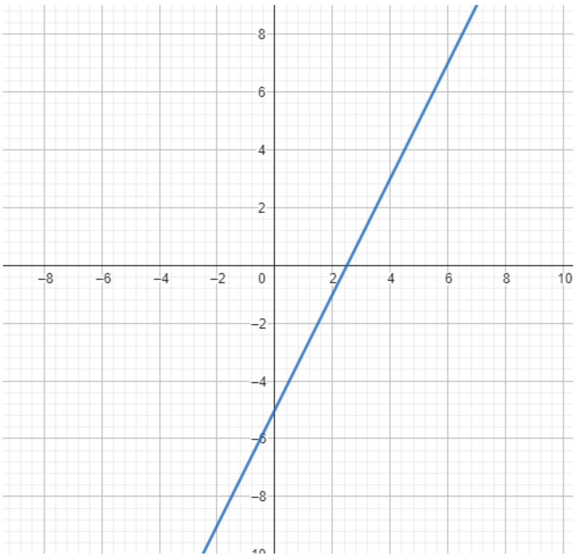
Función lineal

Una función lineal es una función matemática que se puede expresar mediante una ecuación de la forma:

f(x)=mx+b

donde:

- f(x) es el valor de la función para un valor dado de x,
- m es la pendiente de la recta, que indica la inclinación de la línea (la tasa de cambio de f(x) respecto a x),
- b es la ordenada al origen, el valor de f(x) cuando x=0 (es decir, el punto donde la línea cruza el eje vertical).
- $y = mx + b$
- $f(x) = 2x - 5$



Propiedades de las Funciones Lineales:

1. **Gráfico en Forma de Línea Recta:** El gráfico de una función lineal es siempre una línea recta.
2. **Pendiente Constante:** La pendiente m es constante, mostrando que el cambio en f(x) es proporcional al cambio en x.
3. **Intercepto en el Eje y:** La intersección de la línea con el eje vertical está dada por b, el valor de la función cuando x=0.

Ejemplos de Funciones Lineales

1. **Ejemplo 1:** Supongamos que tienes la función f(x)=2x+3. En este caso, la pendiente m=2 indica que por cada unidad que aumenta x, f(x) aumenta en 2 unidades. La ordenada al origen b=3 significa que la línea cruza el eje vertical en 3.

2. **Ejemplo 2:** Considera la función g(x)=−4x+7. Aquí, la pendiente m=−4 muestra que por cada unidad que aumenta x, f(x)disminuye en 4 unidades. La ordenada al origen b=7 indica que la línea cruza el eje vertical en 7.
3. **Ejemplo 3:** Una función que representa el costo total C en función del número de unidades x producidas, si el costo fijo es $50 y el costo por unidad es $20, se puede expresar como C(x)=20x+50.

Ejemplos.

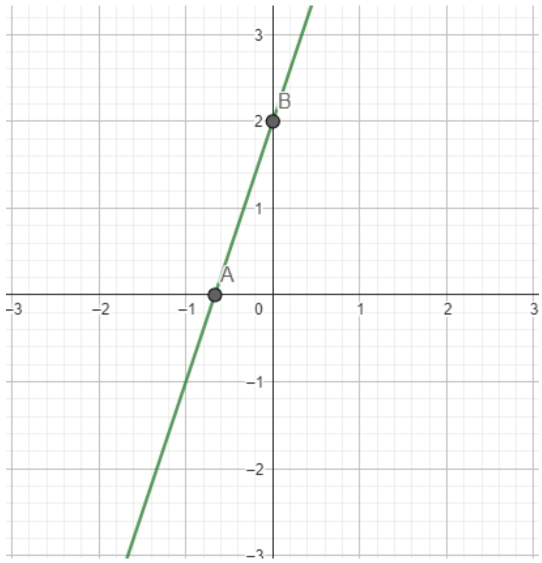
Se grafica mediante tablas de interceptos:

$$y = 3x + 2$$

X	Y
0	2
-0,6	0

$$\boldsymbol{y = 3(0) + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 0 + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 2}$$

$$\boldsymbol{0 = 3x + 2}$$
$$\boldsymbol{-2 = 3x}$$
$$\boldsymbol{x = -\frac{2}{3} = -0,66}$$



Función cuadrática

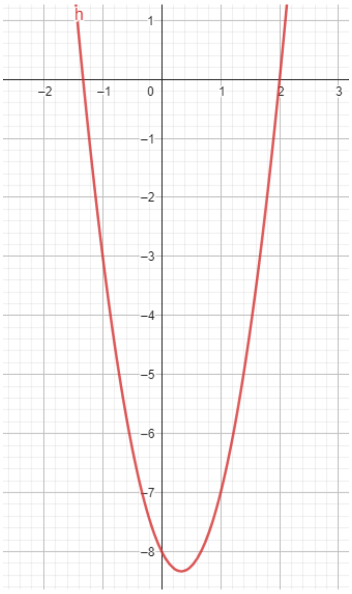
Una función cuadrática es una función polinómica de segundo grado que se expresa mediante la ecuación general:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

donde:

- f(x) es el valor de la función para un valor dado de x,
- a, b y c son constantes, y a≠0,
- a es el coeficiente que determina la apertura de la parábola (si a>0, la parábola abre hacia arriba; si a<0, abre hacia abajo),
- b afecta la dirección de la parábola y su posición relativa a lo largo del eje horizontal,

- c es el término constante que representa el valor de la función cuando x=0, o el punto donde la parábola cruza el eje vertical.
- $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$



Propiedades de las Funciones Cuadráticas:

1. **Gráfico en Forma de Parábola:** El gráfico de una función cuadrática es una parábola.
2. **Vértice:** El vértice de la parábola es el punto más alto o más bajo de la función, dependiendo de la orientación de la parábola. La coordenada x del vértice se puede encontrar usando x=−b/2a
3. **Eje de Simetría:** La parábola es simétrica respecto a una línea vertical llamada eje de simetría, que pasa por el vértice.
4. **Intersecciones con el Eje x:** Los puntos donde la parábola cruza el eje horizontal se encuentran resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Función valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x es una función matemática que se representa como |x|. El valor absoluto de un número es su distancia desde cero en la recta numérica, sin importar la dirección. En otras palabras, es siempre un número no negativo.

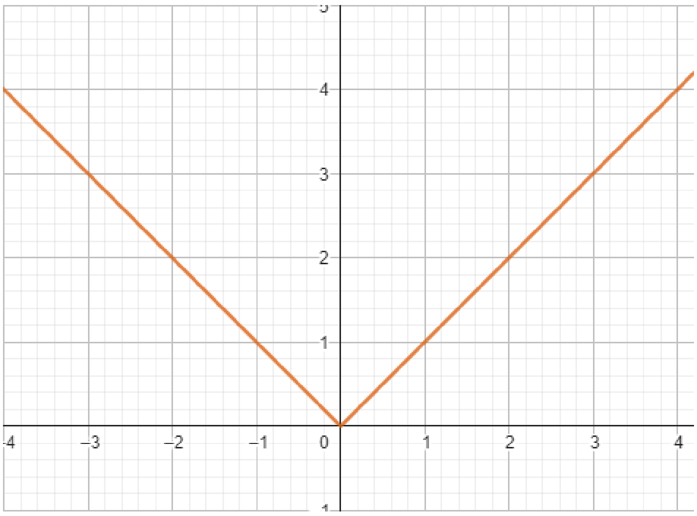
Para formalizar:

- Si x es un número positivo o cero, entonces |x|=x.
- Si x es un número negativo, entonces |x|=−x.

Características de la Función Valor Absoluto

1. **Dominio**: La función valor absoluto está definida para todos los números reales x. Es decir, el dominio es $\mathbb{R}$ (todos los números reales).
2. **Rango**: El rango de la función valor absoluto es [0, ∞), ya que el valor absoluto nunca puede ser negativo.
3. **Simetría**: La función valor absoluto es simétrica con respecto al eje vertical en x=0, ya que |x|=|−x|.
4. **Punto de discontinuidad**: No tiene discontinuidades; es continua en todo su dominio.
5. **Forma gráfica**: La gráfica de |x| es una "V" con su vértice en el origen (0,0). Tiene una pendiente positiva hacia la derecha del eje y una pendiente negativa hacia la izquierda.
6. **No lineal**: Aunque la función es continua y tiene una gráfica simple, no es una función lineal. La función valor absoluto tiene una estructura de pieza lineal con diferentes pendientes en distintas regiones del dominio.

$$f(x) = |x|$$



Como se puede visualizar la gráfica de la función valor absoluto corresponde a una "V".

Ejemplo 1:

- Para x=5, |5|=5.
- Para x=−7, |−7|=7.

Ejemplo 2:

- Si tienes la ecuación |x−3|=4, esto significa que la distancia entre x y 3 es 4. Por lo tanto, las soluciones son x=3+4=7 y x=3−4=−1.

Ejemplo 3:

- La función f(x)=|x^2−4| toma el valor absoluto de la expresión x^2−4. Así, si x=0, f(0)=|−4|=4 y si x=3, f(3)=|9−4|=5.

1.6. Números complejos

Los números complejos son aquellos que tienen una parte real y una parte imaginaria. La parte imaginaria se representa con la letra "i", que es la unidad imaginaria. El plano complejo es un plano cartesiano en el que el eje horizontal representa la parte real y el eje vertical representa la parte imaginaria de un número complejo. Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de manera similar a los números reales.

Un **número complejo** es un número que se puede expresar en la forma z=a+bi, donde:

- a y b son números reales.
- i es la unidad imaginaria, que se define como $i = \sqrt{-1}$, esto implica que $i^2 = -1$

En esta forma, a se llama la **parte real** del número complejo y b se llama la **parte imaginaria**.

Características

1. **Conjunto de Números Complejos**: El conjunto de los números complejos se denota como. Incluye todos los números de la forma a+bi, donde a y b son números reales.
2. **Plano Complejo**: Los números complejos se pueden representar gráficamente en un plano llamado **plano complejo** o **plano de Gauss**, donde la parte real a se representa en el eje horizontal (eje real) y la parte imaginaria b en el eje vertical (eje imaginario).
3. **Conjugado**: El **conjugado** de un número complejo z=a+bi se denota como $\bar{z}$.
4. **Representación Gráfica**: Se pueden representar en el plano complejo (también conocido como plano de Argand), donde el eje horizontal es la parte real y el eje vertical es la parte imaginaria.
5. **Operaciones**: Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir siguiendo reglas específicas:

   Suma: (a+bi) +(c+di) =(a+c) +(b+d) i

   Multiplicación: (a+bi) (c+di) =(ac−bd) +(ad+bc) i
6. **Módulo y Argumento**: Se pueden representar en forma polar como r(cos θ+ isin θ), donde r es el módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el argumento.

1. **Ejemplo 1:** $z_1 = 3 + 4i$
   - Parte real: 3
   - Parte imaginaria: 4
2. **Ejemplo 2:** $z_2 = -2 - 5i$
   - Parte real: -2
   - Parte imaginaria: -5
3. **Ejemplo 3:** Representación e
   - Módulo: $r = \sqrt{3^2 + 4$
   - Argumento: $\theta = \tan^{-1}$

1.7. Forma de representar a un número complejo

Rectangular

Los números complejos se pueden representar en diferentes formas, como la forma rectangular (a + bi), donde "a" es la parte real y "b" es la parte imaginaria;

Trigonométrica o polar

la forma trigonométrica o polar (r (cosθ + i sinθ)), donde "r" es la magnitud del número complejo y "θ" es el ángulo que forma el número complejo con el eje horizontal;

Exponencial

y la forma exponencial (re^(iθ)), donde "e" es la constante de Euler (2.71828...) y "i" es la unidad imaginaria. Cada una de estas formas tiene sus propias ventajas y se utilizan en diferentes contextos. Por ejemplo, la forma polar es útil para realizar operaciones de multiplicación y división de números complejos, mientras que la forma exponencial es útil para realizar operaciones de potencia y raíz cuadrada de números complejos.

CUESTIONARIO UNIDAD 1

Pregunta 1: ¿Qué es una función inyectiva?

- a) Una función donde cada elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio.
- b) Una función donde cada elemento del dominio tiene una única imagen en el codominio.
- c) Una función que no tiene imágenes repetidas en el codominio.

Pregunta 2: ¿Cuál de las siguientes funciones es un ejemplo de función cuadrática?

- a) $f(x) = 3x + 2$
- b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
- c) $f(x) = \sqrt{x}$

Pregunta 3: ¿Qué tipo de función es f(x)=1/x?

- a) Función lineal
- b) Función racional
- c) Función exponencial

Pregunta 4: ¿Qué característica define a una función par?

- a) f(−x) =f(x) para todos x en el dominio.
- b) f(−x) =−f(x) para todos x en el dominio.
- c) La gráfica es simétrica respecto al eje x

Pregunta 5: ¿Cuál de las siguientes es una función exponencial?

- a) $f(x) = 2^x$
- b) $f(x) = x^2$
- c) $f(x) = \log(x)$

Pregunta 6: ¿Qué es una función compuesta?

- a) Una función que se puede expresar como la suma de dos funciones.
- b) Una función que se obtiene al aplicar una función a los resultados de otra función.
- c) Una función que tiene dos variables independientes.

Pregunta 7: La función $f(x) = \sqrt{x}$ es:

- a) Una función lineal.

- b) Una función cuadrática.
- c) Una función raíz.

Pregunta 8: ¿Cuál es el rango de la función $f(x)=x^2$?

- a) R
- b) $[0,\infty)$
- c) $(-\infty,0)$

Pregunta 9: La función $f(x)=3x^2-2x+1$ es:

- a) Lineal
- b) Cuadrática
- c) Cúbica

Pregunta 10: ¿Qué es una función constante?

- a) Una función que cambia su valor.
- b) Una función que toma el mismo valor para cualquier entrada.
- c) Una función que tiene una pendiente variable.

SOLUCIONARIO

Respuestas Correctas

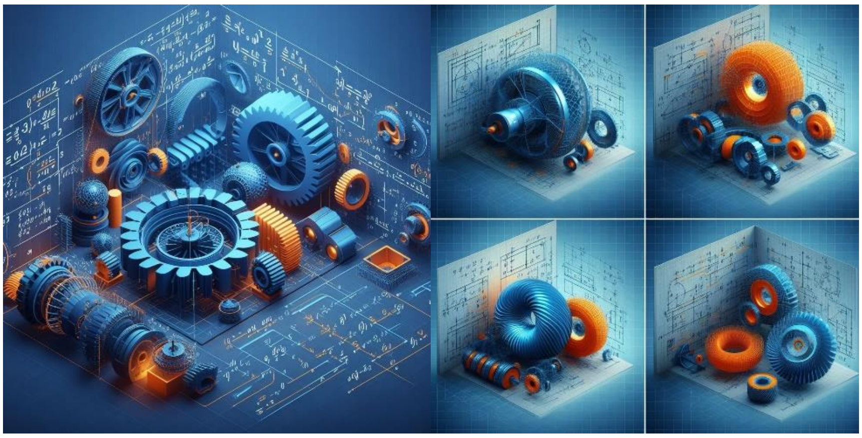
1. b
2. b
3. b
4. a
5. a
6. b
7. c
8. b
9. c
10. b

02

CÁLCULO DIFERENCIAL

UNIDAD DOS

CÁLCULO DIFERENCIAL



Se profundiza en el cálculo diferencial. Se analizan los límites de una función y se explica cómo calcularlos. También se estudia la derivada de una función y se detallan las reglas de derivación. Además, se examina la diferenciación y se exploran las diferentes aplicaciones de la derivada.

2.1. Límites de una función:

El concepto de límite de una función es fundamental en el cálculo diferencial e integral. Se refiere al valor al que se aproxima una función cuando su variable independiente se acerca a cierto valor, sin necesariamente alcanzarlo. En otras palabras, el límite de una función en un punto dado se calcula evaluando la función en valores cada vez más cercanos a ese punto. Si los valores obtenidos se acercan a un valor fijo, entonces ese valor es el límite de la función en ese punto.

El límite de una función describe el comportamiento de la función f(x) a medida que la variable x se aproxima a un valor específico a. Se dice que el límite de f(x)f(x)f(x) cuando x tiende a "a" es L (escrito como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si, a medida que x se acerca a "a", los valores de f(x) se acercan a L.

Gráfico de Límites

En un gráfico, el límite se puede visualizar observando el comportamiento de la curva de la función cerca del punto x=a

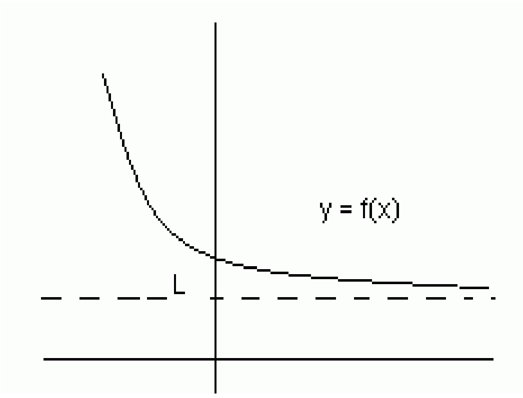
- **Límite Izquierdo** $\lim_{x \to -a} f(x) = L$: Observa el valor de la función al acercarse a "a" desde la izquierda.
- **Límite Derecho** $\lim_{x \to +a} f(x) = L$: Observa el valor de la función al acercarse a "a" desde la derecha.

Si ambos límites laterales son iguales, el límite en a existe.

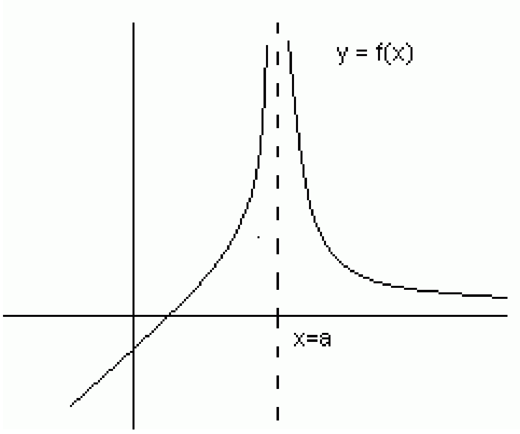
2.2. Cálculo de límites:

El cálculo de límites puede ser realizado de diferentes maneras, dependiendo de la complejidad de la función. Las técnicas más comunes incluyen la sustitución directa, la factorización, la racionalización, la multiplicación por el conjugado, el uso de las reglas de L'Hôpital y la aplicación del teorema del sandwich. El objetivo del cálculo de límites es determinar si una función tiene un límite finito o no en un punto dado, lo que puede ser utilizado para analizar el comportamiento de la función en ese punto y en su entorno.

Hay dos casos destacables de límites, tal como podemos verlo en las gráficas de abajo:



Para la función y = f(x) de la figura f(x) tiende al valor L para x en el infinito geométricamente se habla de que y = L es una asíntota horizontal de la curva.



En el caso de la figura anterior, es la función y = f(x) la que toma un valor infinito en el punto x=a, geométricamente x=a es una asíntota vertical de la curva.

Propiedades de los límites

PROPIEDAD		EXPRESIÓN
Límite de una Constante	El límite de una función constante es esta misma constante	$\lim\limits_{x \to a} k = k$
Límite de Constante por Función	En un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.	$\lim\limits_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$
Límite de Suma de funciones	El límite de la suma es la suma de los límites.	$\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
Límite de Resta de funciones	El límite de la resta es la resta de los límites	$\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Límite de Producto de Funciones	El límite del producto es el producto de los límites	$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$
Límite de Cociente de Funciones	El límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.	$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$; siempre que $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$
Límite de una Potencia	El límite de una función potencial es la potencia del límite del base elevado al exponente.	$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$
Límite de la Raíz	El límite de una raíz, es la raíz del límite.	$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ si el índice n es par, debe ser $\lim_{x\to a} f(x) >$
Límite de Función Exponencial	El límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente.	$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim_{x\to a} g(x)}$
Límite de función logarítmica	El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.	$\lim_{x\to a}[log_k f(x)] = log_k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

Límites Infinitos

Una función f(x) puede tener un límite infinito cuando la función f(x) llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como se desee. Se dice entonces que f(x) diverge a infinito. Esto puede ocurrir cuando la variable x tienda a un valor finito a o también cuando x tienda al infinito.

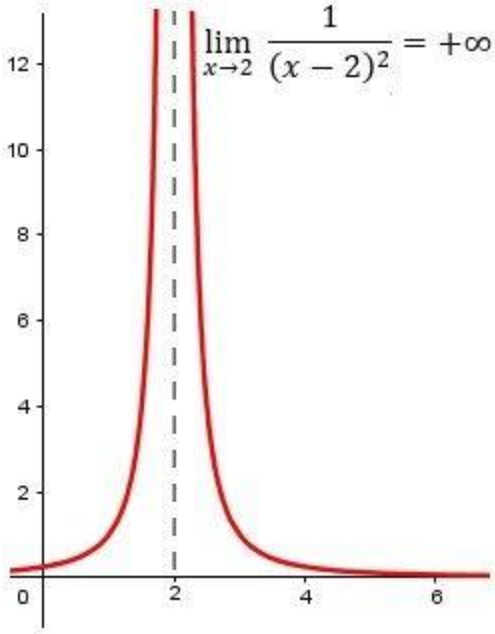
Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se puede comprobar si se da valores a la x cada vez más cercanos a 2, tanto acercándonos por su izquierda como por su derecha, como se ve en el siguiente cuadro, el límite tiende a +∞:

x		*f(x)*
-2,1000	2,1000	1×10^{2}
-2,0100	2,0100	1×10^{4}
-2,0010	2,0010	1×10^{6}
-2,0001	2,0001	1×10^{8}



Para poder realizar el cálculo de límites se debe considerar las posibles indeterminaciones que se generen, es decir casos matemáticos que no hay solución, como los que se observan en la tabla que se detalla a continuación:

		VALOR DEL LÍMITE DE LA FUNCIÓN f(x)	
		LÍMITE FINITO	LÍMITE INFINITO
Valor al que tiende x	FINITO	$\lim_{x\to a} f(x) = L$	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
	INFINITO	$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

2.3. Derivada de una función:

La derivada de una función es una medida de su tasa de cambio instantánea. Se define como el límite del cociente incremental entre la función y su variable independiente cuando el incremento tiende a cero. En otras palabras, la derivada mide la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado. La derivada es una herramienta fundamental en el cálculo diferencial, ya que permite calcular el cambio instantáneo de una función en cualquier punto.

La derivada de una función f(x), o función derivada de f(x), es aquella función, denotada f'(x), que asocia a cada x la rapidez de cambio de la función original f(x) en ese punto, es decir, su tasa de variación instantánea. Las derivadas son herramientas fundamentales en todas las ciencias.

Se llama función derivada de f(x), o simplemente derivada de f, y se denota normalmente como f'(x), al límite:

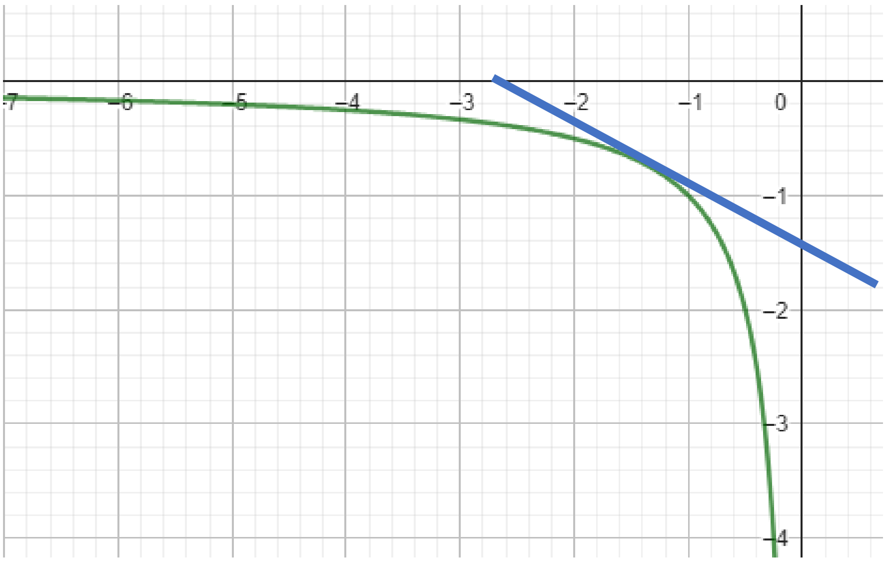
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El conjunto de puntos en que una función es derivable se conoce como dominio de derivabilidad y se cumple que:

$$Dom(f') \subseteq Dom(f)$$

Interpretación Geométrica

Geométricamente, la derivada de una función en el punto a es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto:



Representación gráfica de la derivada

La recta tangente a la función en el punto de abscisa a. El valor de su pendiente, m, es, precisamente, el valor de la la derivada en ese punto f'(a). Observa que, en 1, la función es creciente en el punto considerado, siendo f'(a) > 0. En cambio, en 2, la función es decreciente y f'(a) < 0.

La pendiente de una recta que pasa por los puntos (x1, y1), (x2, y2) se puede expresar como:

$$m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$$

Notaciones de la derivada

La derivada se puede denotar con diferentes nomenclaturas:

La notación de Leibniz indica respecto a qué variable se deriva la función. Así df(x)/dx indica que derivamos f(x) respecto a x, y ds(t)/dt indica que derivamos s(t) respecto a t.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

También se utiliza f' propuesta por Lagrange para referirnos a la función derivada de f. Como extensión de la misma, en ocasiones se identifica f con y, y se escribe y' (si f(x)=y, entonces f'(x)=y').

2.4. Diferenciación:

La diferenciación es el proceso de calcular la derivada de una función. Para realizar la diferenciación, se utilizan las reglas de derivación, que son una serie de fórmulas que permiten calcular la derivada de diferentes tipos de funciones. La diferenciación es una herramienta fundamental en el cálculo diferencial, ya que permite analizar el comportamiento de una función en cualquier punto y determinar su concavidad y puntos críticos.

2.5. Reglas de derivación:

Las reglas de derivación son una serie de fórmulas que permiten calcular la derivada de diferentes tipos de funciones. Estas reglas incluyen la regla de la cadena, la regla del producto, la regla de la suma y la regla del cociente. Cada una de estas reglas es útil para calcular la derivada de funciones más complejas a partir de funciones más simples.

Derivación por fórmulas de funciones algebraicas

REGLA	EXPRESIÓN
Derivada de una constante La derivada de una constante es cero	$f(x) = 7$ $f'(x) = 0$
Derivada de una potencia entera positiva La derivada de x^n es $n\ x^{n-1}$	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$
Derivada de una constante por una función. Su derivada es la constante por la derivada de la función, o c*f'(x)	$f(x) = 3x^5$ $f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$
Derivada de una suma La regla para la derivada de una suma es (f+g)'=f'+g', es decir, la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada uno de los términos por separado	$f(x) = 2x^3 + x$ $f'(x) = 6x^2 + 1$
Derivada de un producto La derivada de un producto es (fg)'= fg'+f'g. La derivada de un producto de dos funciones es la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera.	$f(x) = (4x + 1)(10x^2 - 5)$ $f'(x) = 20x(4x + 1) + 4(10x^2 - 5)$
Derivada de un cociente La derivada de un cociente de dos funciones es la segunda, por la derivada de la primera, menos la primera por la derivada de la segunda todo esto entre la segunda al cuadrado.	$[\frac{f}{g}]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

	$f(x) = \dfrac{4x + 1}{10x^2 - 5}$ $f'(x) = \dfrac{4(10x^2 - 5) - 20x(4x + 1)}{(10x^2 - 5)^2}$

Fórmulas para derivación de funciones trigonométricas

Para poder resolver ejercicios de derivación con funciones trigonométricas se debe considerar las reglas de la derivación descritas en las siguientes imágenes.

$$1)\ \frac{d}{dx}[sen(u)] = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{d}{dx}[\cos(u)] = -sen(u)\frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}[\tan(u)] = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$4)\ \frac{d}{dx}[\cot(u)] = -\csc^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$5)\ \frac{d}{dx}[\sec(u)] = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$$

$$6)\ \frac{d}{dx}[\csc(u)] = -\csc(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$$

REGLA DE L´HÔPITAL

Sirve para resolver muchos casos de límites que generen indeterminación, especialmente los casos más complejos, exponenciales o términos no racionales. Se aplica directamente a límites con indeterminaciones del tipo 0/0 o ∞/∞.

Realizando transformaciones para llegar a una de los tipos anteriores. La regla de l'Hôpital puede aplicarse sucesivamente. Requiere conocer bien la técnica de la derivación.

2.6. Aplicación de la derivada:

La derivada tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas y la física. Por ejemplo, se utiliza para determinar la velocidad y aceleración instantánea en cinemática, para encontrar los máximos y mínimos de una función en optimización, para analizar la concavidad y puntos críticos en análisis de funciones, y para calcular la tasa de cambio en economía y finanzas. La aplicación de la derivada es esencial en muchas áreas de la ciencia y la tecnología.

Aplicaciones de la derivada: optimización en máximos y mínimo en problemas relacionados con la electromecánica

OPTIMIZACIÓN

Optimizar algo significa maximizar o minimizar uno de los aspectos como puede ser el área, el volumen, el perímetro, la longitud, etc.

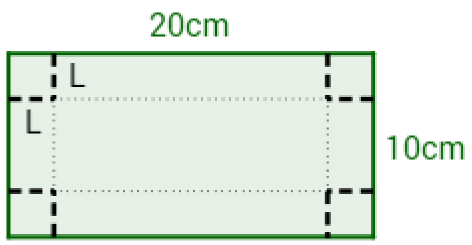
Procedimiento para resolver problemas de optimización.

- Leer el problema las veces que sea necesario hasta que lo entiendan.
- Hacer un dibujo que interprete la situación planteada en el problema.
- Asignar símbolos y letras a todas las magnitudes que intervienen
- Identificar la magnitud que se desee optimizar (maximizar o minimizar)
- Escribir una ecuación primaria para la magnitud que debe ser optimizada.
- Reducir la ecuación primaria a una ecuación con solo una variable independiente. Para lo cual utilizar ecuaciones secundarias.
- Derivar la ecuación anterior e igualar a uno para determinar los puntos críticos.
- Analizar e interpretar los resultados.

Ejemplo:

Problema

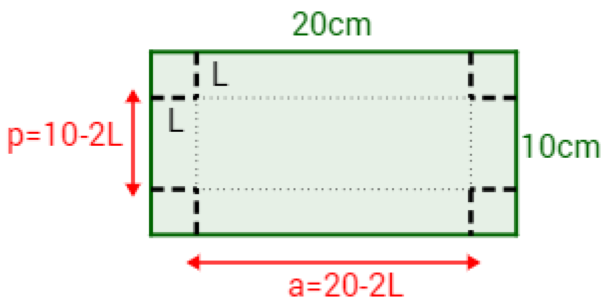
Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20x10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.



Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L debe medir entre 2 y 3 cm (2≤L≤32≤L≤3).

Si a es el ancho de la caja, h es su altura y pp es su profundidad, entonces su volumen es

$$V = a \cdot h \cdot p$$



Al cortar los cuatro cuadrados de lado LL, el ancho de la caja es

$$a = 20 - 2L$$

La profundidad es

$$p = 10 - 2L$$

Por último, la altura coincide con el lado del cuadrado recortado:

$$h = L$$

Luego el volumen de la caja en función de LL es (paso 1)

$$V(L) = (20 - 2L) \cdot (10 - 2L) \cdot L =$$
$$= (200 - 40L - 20L + 4L^2) \cdot L =$$
$$= (200 - 60L + 4L^2) \cdot L =$$
$$= 200L - 60L^2 + 4L^3$$

Derivamos la función volumen (paso 2):

$$V'(L) = 200 - 120L + 12L^2$$

Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos (paso 3):

$$V'(L) = 0 \quad \rightarrow$$
$$200 - 120L + 12L^2 = 0 \rightarrow$$
$$L = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} 7.89 \\ 2.11 \end{cases}$$

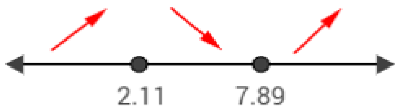
Situamos los puntos en la recta real y estudiamos los signos en los intervalos (paso 4):

Escogemos los puntos x=1 del primer intervalo, x=3 del segundo intervalo y x=8 del tercero:

$$V'(L) = 200 - 120L + 12L^2$$

$$V'(1) = 200 - 120 + 12 =$$
$$= 92 > 0$$
$$V'(3) = 200 - 120 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 =$$
$$= -52 < 0$$

$$V'(8) = 200 - 120 \cdot 8 + 12 \cdot 8^2 =$$
$$= 8 > 0$$



Luego la función es creciente en el primer intervalo, decreciente en el segundo y creciente en el tercero:

$$]-\infty, 2.11[\quad \leftarrow \quad creciente$$
$$]2.11, 7.89[\quad \leftarrow \quad decreciente$$
$$]7.89, +\infty[\quad \leftarrow \quad creciente$$

Pero el lado L debe medir entre 2 y 3, es decir, debe ser

$$L \in [2{,}3]$$

Como en el intervalo [2.11,3] la función es decreciente, el volumen será máximo para L=2.11cm.

Por tanto, las dimensiones de la caja deben ser

$$a = 20 - 2 \cdot 2.11 =$$
$$= 15.78cm$$
$$p = 10 - 2 \cdot 2.11 =$$
$$= 5.78cm$$
$$h = 2.11cm$$

Es decir, las dimensiones son 15.78 x 5.78 x 2.11 cm y su volumen es 192.45cm2.

CUESTIONARIO UNIDAD 2

Pregunta 1: ¿Qué es la derivada de una función en un punto?

- a) La pendiente de la recta secante en ese punto.
- b) La pendiente de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.
- c) El valor de la función en ese punto.

Pregunta 2: ¿Cuál es la derivada de $f(x)=x^3$?

- a) $3x^2$
- b) $2x^2$
- c) $3x^3$

Pregunta 3: ¿Qué regla se utiliza para derivar el producto de dos funciones?

- a) Regla del cociente
- b) Regla de la cadena
- c) Regla del producto

Pregunta 4: ¿Cuál es la derivada de la función f(x)=sin (x)?

- a) cos(x)
- b) −sin(x)
- c) tan(x)

Pregunta 5: ¿Qué representa la derivada de una función en términos de movimiento?

- a) La posición
- b) La velocidad
- c) La aceleración

Pregunta 6: ¿Cómo se denota la derivada de f(x) con respecto a x?

- a) $f'(x)$
- b) Δf
- c) $\frac{dy}{dx}$

Pregunta 7: ¿Cuál es la derivada de $f(x)=e^x$?

- a) e^x
- b) xe^{x-1}
- c) $\ln(x)$

Pregunta 8: ¿Qué significa que una función es continua en un punto?

- a) La función no tiene derivadas en ese punto.
- b) El límite de la función en ese punto es igual al valor de la función.
- c) La función tiene una pendiente constante.

Pregunta 9: Si f′(x)=0 en un intervalo, ¿qué se puede concluir sobre la función f(x) en ese intervalo?

- a) La función es creciente.
- b) La función es constante.
- c) La función es decreciente.

Pregunta 10: ¿Cuál es la derivada de f(x)=ln(x)?

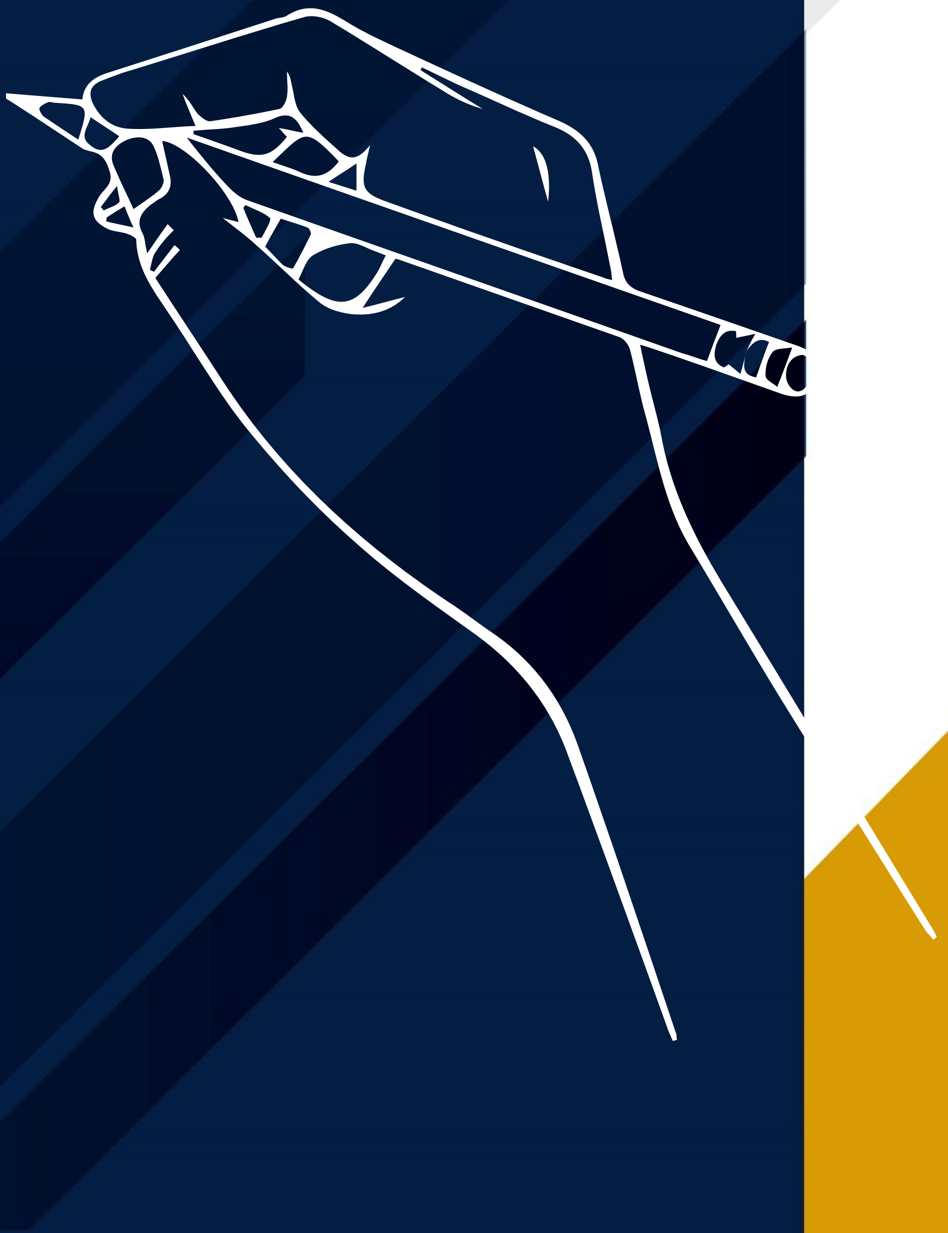
- a) $\frac{1}{x}$
- b) x
- c) e^x

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS CORRECTAS

1. b
2. a
3. c
4. a
5. b
6. a
7. a
8. b
9. b
10. a

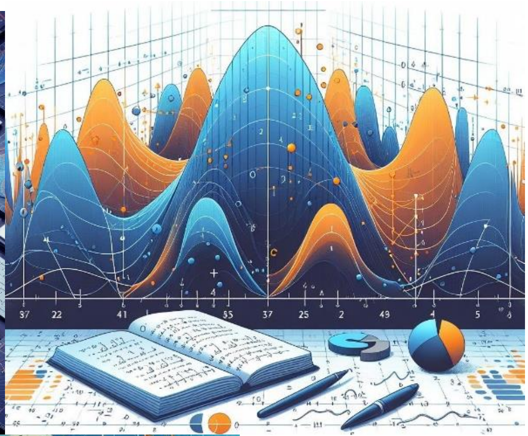
03



CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO TRES

CÁLCULO INTEGRAL



Se aborda el cálculo integral. El cálculo integral es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las áreas y volúmenes. Se explica la integral indefinida y se analiza cómo realizarla por sustitución o por partes. La integral indefinida es una herramienta matemática que permite encontrar una función a partir de su derivada. También se estudia la integral definida y se exploran las diferentes aplicaciones de la integral, como el cálculo de áreas y volúmenes. La integral definida es una herramienta matemática que permite encontrar el área bajo una curva en un intervalo específico.

3.1. Integral Indefinida

La integral indefinida es una operación inversa de la derivación, que permite encontrar una función cuya derivada es igual a la función dada. Se representa por el símbolo ∫ y se lee como "integral de". La integral indefinida no tiene límites de integración, por lo que el resultado es una familia de funciones que difieren en una constante arbitraria. La integral indefinida se utiliza para resolver problemas de optimización, cálculo de áreas y volúmenes, y análisis de funciones.

Integrar

Integrar es el proceso recíproco de derivar, es decir, dada una función f(x), busca aquellas funciones F(x) que al ser derivadas conducen a f(x). Se dice, entonces, que F(x) es una primitiva o antiderivada de f(x); dicho de otro modo, las primitivas de f(x) son las funciones derivables F(x) tales que:

F'(x)=f(x)

Si una función f(x) tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.

$$[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

LA INTEGRAL INDEFINIDA

Es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

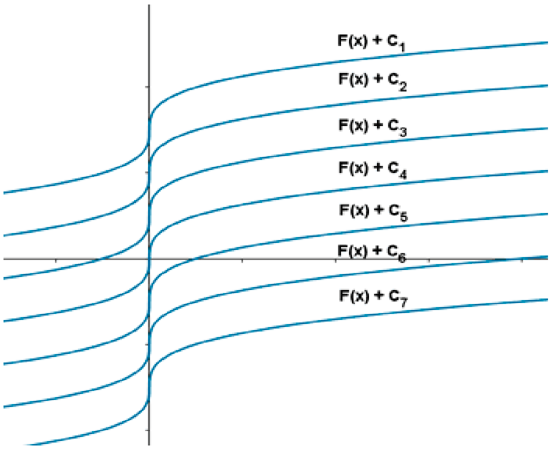
- Se representa por $\int f(x)dx$.
- Se lee : integral de f de x diferencial de x.
- $\int$ es el signo de integración.
- $f(x)$ es el integrando o función a integrar.
- dx es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.
- C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces: $\int f(x)dx = F(x) + C$
- Para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar.

Constate de integración

La constante de integración es un valor agregado al cálculo de las antiderivadas o integrales, sirve para representar las soluciones que conforman la primitiva de una función. Expresa una ambigüedad inherente donde cualquier función cuenta con un número infinito de primitivas.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si representamos la primitiva F(x), cada función de la forma F(x) + C resulta una traslación vertical de valor C de la función F(x).



Propiedades de la integral indefinida

La integral de una suma (o resta) de funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones.

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,d(x)$$

La derivada de la integral de una función es igual a la función.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

Se suelen denominar integrales inmediatas a las que resultan evidentes por ser el integrando la derivada de una función conocida. Evidentemente no se trata de un concepto matemático riguroso, simplemente se toma como inmediatas las integrales básicas más habituales. Se asumirá por tanto como integrales conocidas o inmediatas a las siguientes:

Tipos	Integral	Ejemplos
Constante	$\int k\,dx = kx + C$	$\int 5\,dx = 5x + C$
Potencial		
Simple	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\quad a \neq -1$	Potencial
Compuesta	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}\quad a \neq -1$	
Logarítmica		
Simple	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	Logarítmico
Compuesta	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$	
Exponencial		
Simple	$\int e^x\,dx = e^x$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\quad a > 0$	Exponencial
Compuesta	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$ $\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}\quad a > 0$	

Tipos	Integral	Ejemplos
Seno		
Simple	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$	Seno
Compuesta	$\int \cos f \cdot f' \, dx = \operatorname{sen} f$	
Coseno		
Simple	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$	Coseno
Compuesta	$\int \operatorname{sen} f \cdot f' \, dx = -\cos f$	
Tangente		
Simple	$\int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$	Tangente
Compuesta	$\int \left(1+\operatorname{tg}^2 f\right) \cdot f' \, dx = \operatorname{tg} f$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f$	
Cotangente		
Simple	$\int \left(1+\operatorname{cot} g^2 x\right) \cdot dx = -\operatorname{cot} g\, x$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cot} g\, x$	Cotangente
Compuesta	$\int \left(1+\operatorname{cot} g^2 f\right) \cdot f' dx = -\operatorname{cot} g\, f$ $\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} dx = -\operatorname{cot} g\, f$	

3.2. Integral por sustitución

La integral por sustitución es una técnica de integración que consiste en reemplazar una parte de la función por una nueva variable, para simplificar la integración. Esta técnica se basa en la regla de la cadena de la derivación, y se utiliza para integrar funciones compuestas. La integral por sustitución se aplica cuando la función a integrar tiene una expresión compleja que dificulta la integración directa.

La técnica más general de integración es la de cambio de variable, el fundamento de la misma es el siguiente: Sea Φ una función de clase C1 y sea f una función continua.

Sea x = Φ(t), entonces se verifica:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,dt$$

Es decir, es posible cambiar la variable de integración de esa manera.

En algunos casos se plantea el cambio de variable de una forma alternativa. Si aparece en el integrando como factor la derivada de una función presente en el propio integrando, a menudo es aconsejable realizar el siguiente cambio:

$$\int f'(x)g(f(x))\,dx = \left\{ \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int g(t)\,dt$$

No existen métodos generales que indiquen qué cambio de variable es el ideal para una integral cualquiera, sin embargo, en muchos casos sí es posible encontrar un cambio sencillo que nos convierta una integral dada en una de las que hemos considerado inmediatas.

Ejercicio 1:

$$\int \frac{dx}{2x+3}$$

El cambio es: 2x+3 = t

$$x = \tfrac{1}{2}(t-3)$$

Por lo tanto:

$$dx = \tfrac{1}{2}\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

Ejercicio 2:

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

El cambio es: $x^2+1=t$

Por lo tanto:

$$x\,dx = \tfrac{1}{2}dt\,;$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

3.3. Integral por partes

La integral por partes es una técnica de integración que permite descomponer una función en dos partes, para facilitar su integración. Esta técnica se basa en la regla del producto de la derivación, y se utiliza para integrar funciones que tienen una expresión algebraica y otra exponencial o trigonométrica. La integral por partes se aplica cuando la función a integrar tiene una estructura compleja que dificulta la integración directa.

El método de integración por partes está basado en la regla de derivación de un producto de dos funciones es derivable. En forma diferencial:

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'\,dx \;=\; f'(x)g(x)\,dx \;+\; f(x)g'(x)\,dx$$

Tradicionalmente se escribe u y v para denotar las dos funciones, de manera que la fórmula de integración por partes aparece habitualmente escrita en la forma:

$$\int u\,dv \;=\; uv \;-\; \int v\,du$$

Donde se ha obviado la constante aditiva, además de despejarse una de las integrales en función de la otra, para poner de manifiesto la utilidad del método. Se trata de convertir una integral dada (que identificamos con ∫ udv) en una función conocida (el término uv) menos una nueva integral (∫ vdu), con la esperanza de que esta segunda resulte más fácil de resolver que la original. Evidentemente la aplicación exitosa del método requiere además saber derivar la función que se identifica como u e integrar la que se toma como derivada de v.

$$I = \int x\,e^x\,dx$$

Realizar las siguientes identificaciones:

$$dv \;=\; e^x\,dx,\;\; u \;=\; x.$$

S tendrá de esta manera:

$$du \;=\; dx \text{ y } v = e^x + C.$$

En este punto es interesante comentar que se puede escoger una función primitiva cualquiera para especificar v, es decir la fórmula de integración por partes se verificará para cualquier valor de C, por simplicidad tomaremos entonces C = 0, y por tanto: $v = e^x$

$$I = \int x\, e^x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} dv = e^x\, dx; & v = e^x \\ u = x; & du = dx \end{array} \right\} = e^x\, x - \int e^x\, dx = e^x\, x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

3.4. Integral definida

La integral definida es una operación matemática que permite calcular el área bajo una curva entre dos puntos dados. Se representa por el símbolo ∫ y se lee como "integral de a hasta b". La integral definida tiene límites de integración, que indican los puntos entre los cuales se desea calcular el área. La integral definida se utiliza para calcular áreas, volúmenes, trabajo y energía en física, y probabilidades en estadística.

Dada una función f(x) y un intervalo [a,b], la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas verticales x = a y x = b.

La integral definida se representa por símbolo integral definida:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

- ∫ es el signo de integración.
- a límite inferior de la integración.
- b límite superior de la integración.
- f(x) es el integrando o función a integrar.
- dx es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero.

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\;dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k\cdot f(x) = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejercicios:

$$\int_0^2 (2+x)dx$$

Usamos las formulas definidas para integrar la función (2+x) :

$$2+x \quad\rightarrow\quad 2x+\tfrac{x^2}{2}$$

Ahora , lo siguiente es evaluar esa función en los puntos 0 y 2:

$$2(0)+\tfrac{(0)^2}{2}=0+0=0$$
$$2(2)+\tfrac{(2)^2}{2}=4+2=6$$

Ahora, al del extremo mayor, le restamos el del extremo menor del intervalo.

$$6-0=6$$

La integral definida en ese intervalo es 6. Lo que quiere decir que el área bajo la curva de esa ecuación en tan solo ese intervalo es de 6 unidades.

3.5. Aplicaciones de la integral

La integral tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas y la física. Por ejemplo, se utiliza para calcular áreas y volúmenes en geometría, para determinar la tasa de cambio en economía y finanzas, para calcular el trabajo y la energía en física, para analizar la distribución de probabilidades en estadística, y para modelar sistemas dinámicos en ingeniería. La aplicación de la integral es esencial en muchas áreas de la ciencia y la tecnología.

Aplicaciones del cálculo integral en problemas relacionados con la electromecánica

Cuando se presentan circuitos de corriente alterna en el dominio del tiempo se pueden calcular los parámetros del circuito aplicando el cálculo infinitesimal ya que estos parámetros obedecen a las siguientes ecuaciones.

Dispositivo	Voltaje	Corriente
Resistencia	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{v(t)}{R}$
Bobina	$v(t) = L\frac{di}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int vdt$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{c}\int idt$	$i(t) = C\frac{dv}{dt}$

Ejemplos:

A los terminales de una bobina con coeficiente de autoinducción L = ¼ H se inyecta una tensión v(t) = 150sen(wt). Hallar la corriente que circula por el inductor y la potencia que disipa.

La corriente que circula por una bobina está dada por:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int vdt \rightarrow i(t) = \frac{1}{\frac{1}{4}}\int 150sen(wt)dt \rightarrow i(t) = -\frac{600}{w}cos(wt) + c$$

$$p(t) = [150sen(wt)dt]\left[-\frac{600}{w}cos(wt) + C\right]$$

$$p(t) = 150Ccos(wt) - \frac{90000}{w}sen(wt)cos(wt)$$

A un capacitor puro de capacitancia 2F se le aplica una tensión:

v(t) = 24sen(ωt + π), hallar la corriente i(t) que circula por el elemento, la potencia p(t) que disipa y la carga almacenada q(t).

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \rightarrow i(t) = 48\omega cos(\omega t + \pi)$$

$$p(t) = [48\omega cos(\omega t + \pi)]\,[24sen(\omega t + \pi)] \rightarrow p(t) = 1152\omega cos(\omega t{+}\pi)sen(\omega t{+}\pi)$$

$$q(t) = Cv(t) \rightarrow q(t) = 2\,[24sen(\omega t + \pi)] \rightarrow q(t) = 48sen(\omega t + \pi)$$

CUESTIONARIO UNIDAD 3

Pregunta 1: ¿Qué es una integral definida?

- a) La suma de los valores de una función en un intervalo.
- b) El área bajo la curva de una función en un intervalo específico.
- c) El valor de la función en un punto específico.

Pregunta 2: ¿Cuál es la notación común para la integral de una función f(x)?

- a) $\int f(x)\,dx$
- b) $\sum f(x)$
- c) $\Delta f(x)$

Pregunta 3: ¿Qué representa el teorema fundamental del cálculo?

- a) La relación entre derivadas e integrales.
- b) La relación entre límites y continuidad.
- c) La relación entre funciones y sus gráficos.

Pregunta 4: ¿Cuál es la integral indefinida de $f(x)=3x^2$?

- a) $x^3 + C$
- b) $\frac{3}{3}x^3 + C$
- c) $\frac{3}{2}x^2 + C$

Pregunta 5: ¿Qué significa el símbolo CCC en una integral indefinida?

- a) El valor constante de la función.
- b) La constante de integración.
- c) La variable de integración.

Pregunta 6: ¿Cuál es el resultado de la integral definida $\int_1^3 (2x)\,dx$?

- a) 4
- b) 8
- c) 12

Pregunta 7: ¿Cuál es la integral de f(x)=sin(x)?

- a) $-\cos(x)+C$
- b) $\cos(x)+C$
- c) $\sin(x)+C$

Pregunta 8: ¿Qué técnica se utiliza para integrar funciones del tipo $\int f(g(x)) * g'(x)dx$?

- a) Integración por partes
- b) Sustitución
- c) Fracciones parciales

Pregunta 9: ¿Cuál es el área bajo la curva de f(x)=x desde x=0 hasta x=2?

- a) 1
- b) 2
- c) 4

Pregunta 10: ¿Cuál es la integral de $f(x)=e^x$?

- a) $e^x + C$
- b) $\ln(x) + C$
- c) $xe^x + C$

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS CORRECTAS

1. b
2. a
3. a
4. a
5. b
6. b (Resultado: 444)
7. a
8. b
9. c (Área: 222)
10. a

BIBLIOGRAFÍA:

"Cálculo" por James Stewart - Un libro de texto ampliamente utilizado en cursos de cálculo que cubre el valor absoluto y sus aplicaciones en detalle.

"Fundamentos de Matemáticas" por Peter Smith - Ofrece una introducción general a conceptos básicos en matemáticas, incluyendo la función valor absoluto.

Adserá, A. (11 de 22 de 2013). *Encicloèdia de salud, dietética y psciología* . Obtenido de http://www.enciclopediasalud.com/definiciones/fisiologia

Aguilar, L. (05 de 08 de 2021). *Cálculo Integral* . Obtenido de https://sites.google.com/site/calculointegralaguilarlaura/1-4-definicion-de-la-integral-definida

Aguilar, L. (05 de 08 de 2021). Cálculo Integral. Obtenido de https://sites.google.com/site/calculointegralaguilarlaura/1-4-definicion-de-la-integral-definida

Amestoy, A. S. (2010). *Desarrollo del pensamiento.* Quito.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2013). *Calculus*. Wiley.

Ausubel. (2006). *Psicología del Aprendizaje significativo.* New York.

Derrickson, T. (2013). *Principios de Anatomía y Fisiología* . Buenos Aires - Bogotá - México: Editorial Médica Panamericana.

FisicaLab. (01 de 07 de 2021). FisicaLab. Obtenido de https://www.fisicalab.com/tema/derivadas

FisicaLab. (01 de 07 de 2021). *FisicaLab*. Obtenido de https://www.fisicalab.com/tema/derivadas

FisicaLab. (01 de 07 de 2021). *FisicaLab*. Obtenido de https://www.fisicalab.com/tema/derivadas

Flores, M. (23 de agosto de 2012). *Plano del corte sagital medio.* Obtenido de http://generalidadesdelcuerpo.blogspot.com/2012/08/blog-post_23.html

Konig, H., & Liebich, H. (2011). *Anatomía de los animales domésticos.* Argentina: Panamericana.

Konig. (2006). *Anatttomìa de los animales domésticos.* Madrid: Ed. Médica panamericana.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Calculus (10ª ed.). Brooks Cole.

Matemáticas en Movimiento . (03 de 07 de 2021). *Reglas de derivación* . Obtenido de http://www3.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/derivada/der_reg.html

Matemáticas en Movimiento. (03 de 07 de 2021). Reglas de derivación. Obtenido de http://www3.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/derivada/der_reg.html

Matemáticas en Movimiento. (03 de 07 de 2021). Reglas de derivación. Obtenido de http://www3.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/derivada/der_reg.html

Matesfacil. (03 de 07 de 2021). *Matesfacil*. Obtenido de https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html

Matesfacil. (03 de 07 de 2021). Matesfacil. Obtenido de https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html

Matesfacil. (03 de 07 de 2021). *Matesfacil*. Obtenido de https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html

Mathematical Physics Group. (05 de 08 de 2021). *Integral Indefinida*. Obtenido de Mathematical Physics Group: http://campus.usal.es/~mpg/Personales/PersonalMAGL/Docencia/TeoriaTema5CalculoCA11-12.pdf

Mathematical Physics Group. (05 de 08 de 2021). *Integral Indefinida*. Obtenido de Mathematical Physics Group: http://campus.usal.es/~mpg/Personales/PersonalMAGL/Docencia/TeoriaTema5CalculoCA11-12.pdf

Miller, M. E. (1965). *Sistema esqueleto y muscular*. Ithalaca, Nueva York: Saunders Company.

Pearson.

Piaget. (1970). *Teoría del Desarrollo Cognoscitivo*. New York.

Postdam, N. (2002). *Los equipos de aprendizaje cooperativo en el aula*. Brasil: Publicaciones Jonas.

Referencia en APA: Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Calculus (10ª ed.). Brooks Cole.

Referencia en APA: Sullivan, M. (2017). Precalculus: An Investigation of Functions (5ª ed.). Pearson.

Rojas, L. (2000). Principios de Anatomía y Fisiología. Riobamba: XEROX.

Rondon, J. E. (2011). *Cálculo Diferencial.* Bogotá.

Rondon, J. E. (2011). *Cálculo Diferencial.* Bogotá.

Rondon, J. E. (2011). *Cálculo Diferencial.* Bogotá.

Ruberte. (2005). Atlas de Anattomìa del perro y del gato. Zaragoza: Ed. Multimédica.

Stewart, J., & Thomas, A. (2015). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2015). Precalculus: Mathematics for Calculus (7ª ed.). Brooks Cole.

Strang, G. (2016). *Linear Algebra and Its Applications*. Cengage Learning.

Sullivan, M. (2017). Precalculus: An Investigation of Functions (5ª ed.). Pearson.

UNIVERSO FORMULAS. (28 de 06 de 2021). UNIVERSO FORMULAS. Obtenido de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/limites/

UNIVERSO FORMULAS. (28 de 06 de 2021). UNIVERSO FORMULAS. Obtenido de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/limites/
"Álgebra Lineal y sus Aplicaciones" por Gilbert Strang - Proporciona una perspectiva sobre cómo el valor absoluto se relaciona con conceptos en álgebra lineal.

UNIVERSO FORMULAS. (28 de 06 de 2021). *UNIVERSO FORMULAS*. Obtenido de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/limites/

Vadenumeros. (05 de 08 de 2021). Integrales Indefinidas. Obtenido de Vdenumeros.es: https://www.vadenumeros.es/segundo/tabla-de-integrales-inmediatas.htm

Vadenumeros. (05 de 08 de 2021). *Integrales Indefinidas.* Obtenido de Vdenumeros.es: https://www.vadenumeros.es/segundo/tabla-de-integrales-inmediatas.html

INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO PELILEO

ISBN: 978-9942-686-21-3

Educación gratuita y de calidad